# Erläuterung
## der Regeln
# Quadrat- und Cubik-Wurzeln auszuziehen,

für Anfänger

zum

bessern Verständniß der Vorschriften
in Herrn Hofrath Kästners
Anfangsgründen der Arithmetik.

von

J. Nicolaus Müller.

Göttingen
im Verlag der Wittwe Vandenhoek
1776.

# Vorerinnerung.

Der Raum eines Lehrbuches verstattet nicht wohl, die Sätze mit häufigen Beyspielen zu erläutern; selbst seine Absicht befiehlt, solche Erläuterungen der mündlichen Erklärung vorzubehalten. Der Lernende kann indessen doch wohl bey manchen schweren Sätzen, etwas umständlicheres darüber nachzulesen wünschen. So verhält es sich in der Arithmetik mit den

Vor-

Vorschriften zu Ausziehung der Wurzeln. Ich pflege diese Vorschriften für die Wurzeln von zwo Zifern so umständlich zu erklären, daß ich hoffen darf, meine Zuhörer sehen sie für diese Fälle mit ihren Gründen ein; Wenn aber in einem halben Jahre Arithmetik, Geometrie und Trigonometrie sollen vorgetragen werden, so kann man auf die Ausziehung der Wurzeln nicht die gehörige Zeit wenden, welche die Vorschriften für mehr Zifern, mit völligen Beweisen ausgeführt, erfodern.

Der Hr. Verfasser gegenwärtigen Aufsatzes hat sich meines Unterrichts mit glücklichem Eifer bedient. Da er Gelegenheit gehabt hat mathematische Lehren Andern zu erläutern, so hat er gefunden, daß die Schwierigkeiten bey Ausziehung der Wurzeln

zeln Anfängern erleichtert werden, wenn sie die Lehren, so wie er hie gethan aus-einander gesetzt und auf Exempel ange-wandt erhalten. Seine Arbeit hat mir auch allerdings so beschaffen geschienen, daß sie diese Absicht zu erreichen dienlich ist; dem Lernenden, das Nachdenken erleich-tern, und dadurch zu einer angenehmen Beschäfftigung machen kann: Dazu den Geist anzugewöhnen, das ist einer der vor-nehmsten Vortheile, welche die Mathema-tik, ausser dem unmittelbaren Gebrauche ihrer Wahrheiten, ihrem Freunde bringt, und ihn dadurch zu andern als blos mathe-matischen Geschäfften, geschickt macht. Wer nur mit sichtbarängstlicher Mühe, zu-sammenträgt was Andere geschrieben ha-ben, nichts eigenes richtiger und tiefer Ge-dachtes beyzufügen weiß, noch vielweniger

im Stande ist, Reyhen von Schlüssen, aus deutlichen Begriffen, und sichern Gründen herzuleiten, der versteht seinen übrigen Verdiensten unbeschadet, keine Mathematik, und wenn er sich auch unterfinge ein mathematisches Compendium abzulesen. Göttingen im März 1776.

Abraham Gotthelf Kästner.

---

§. 1.

## §. 1.

Um sowohl die Zusammensetzung der Quadrate (Synthesis quadratorum) als Zerlegung derselben in ihre Grundzahlen oder Wurzeln, (analysis quadratorum) recht zu verstehen, muß man einige Sätze aus den ersten Capiteln der Arithmetik wohl inne haben. Die nöthigsten sollen hier kürzlich angeführet werden.

## §. 2.

Eine Zifer oder Zahl etlichemal mit sich selbst multipliciret, giebt ein Product, welches man eine Potenz nennet; und zwar werden die Producte, welche durch Multiplication ein und eben derselben Zahl zwey, drey, vier, fünfmahl, hingesetzt entstanden sind, die 2te, 3te, 4te, 5te Potenz der Zahl genennt, die Zahl selbst aber die mit sich multipliciret wird, heißt die Wurzel von der 2ten, 3ten, 4ten, 5ten Potenz. Die 2te und 3te Potenz einer Zahl haben noch andere Benennungen, nemlich die 2te heißt Quadrat, und

die Zahl, woraus das Quadrat entstanden ist, die Quadratwurzel. Die Benennung Quadrat der 2ten Potenz einer Zahl, kommt daher, weil die Einheiten der zweiten Potenz einer Zahl sich so zusammensetzen lassen, daß sie eine Figur bilden, die man in der Geometrie ein Quadrat nennet. Was die Seite eines Quadrats in der Geometrie genennet wird, heißt hier die Wurzel, d. i. die Zahl die 2mal mit sich multipliciret, die 2te Potenz giebt Um sich hievon zu überzeugen, darf man nur die folgenden Sätze dieser Schrift mit dem 11ten Zusatze des 12ten Satzes oder 9ten Grundsatzes der Geometrie des Hrn. Hofrath Kästners vergleichen, so wird man die völlige Uebereinstimmung finden. Eben so wird man auch begreiffen können; wenn man die dritte Potenz einer Zahl Cubus nennet. Weil nämlich die Einheiten der dritten Potenz sich so zusammenfügen lassen, daß sie diejenige cörperliche Ausdehnung machen, die man in der Geometrie ein Cubus oder Würfel nennet. Hier soll nur von der 2ten und 3ten Potenz, d. i. von dem Quadrat und dem Cubus einer Zahl gehandelt werden.

## §. 3.

Will man andeuten, daß eine Zahl etliche mal mit sich selbst multipliciret, d. i. daß von einer Zahl eine gewisse Potenz gemacht werden soll, so hänget man der Zahl eine andere ein wenig

nig klein geschriebene etwas oben zur Rechten an. So ist die dritte Potenz von 10; gleich 10. 10. 10. $= 10^3$. Diese 3 zur Rechten der 10 bedeutet, daß 10 dreymal mit sich selbst multipliciret werden soll. Man nennet daher eine solche angehängte Zahl Exponent der Potenz zum Unterschied vom Exponenten der Ordnung welcher gerade über die Zifern einer Zahl gesetzet wird, um damit anzuzeigen, was vor eine Stelle eine Zifer von der Rechten oder Linken der Einen einnimmt, nachdem der Exponent der Ordnung positiv oder negativ ist, wie aus den folgenden §§ deutlich erhellen wird. Bey dem Exponenten der Potenz ist eben dieß zu bemerken. Er kann positiv oder negativ seyn. Ist er positiv; so wird dadurch angezeiget, daß eine Zahl etlichemal mit sich selbst multipliciret werden soll. Ein negativer Exponent der Potenz einer Zahl aber bedeutet einen Bruch, wovon der Zähler eins, der Nenner eben die Zahl mit dem nämlichen aber positiven Exponenten der Potenz ist. So ist $10^3 = 10.\ 10.\ 10$; $10^{-3} = \frac{1}{10^3}$ $= \frac{1}{10.\ 10.\ 10}$. $49^3$ ist $= 49 \cdot 49 \cdot 49$, und $49^{-3} =$ $\frac{1}{49^3} = \frac{1}{49 \cdot 49 \cdot 49}$. Man schreibet die Potenz auch so $(49)^3 = 49^3$ und $(49)^{-3} =$ $49^{-3}$.

## §. 4.

Wenn man über die einzelnen Zifern einer Zahl M = $\overset{5}{9}\overset{4}{9}\overset{3}{8}\overset{2}{7}\overset{1}{3}\overset{0}{5}$, die nach der natürlichen Ordnung fortgehende Zifern, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 ꝛc. so schreibet, daß über die schlechte Einer, eine Null, über die Zehner eins, über die hunderter zwey, die tausender drey, die zehntausende vier ꝛc. zu stehen kommt; so können folgende Sätze erwiesen werden.

## §. 5.

Weil nach dem Gesetz der decadischen Ordnung die Einheiten einer Zifer der Zahl M, welche nur eine Stelle weiter zur Linken stehet, zehnmal grösser sind, als die Einheiten einer Zifer, welche ersterer zunächst zur Rechten stehet; so können die über die Zahl M geschriebene kleine Zifern, nachfolgendes bedeuten.

1) Bedeutet eine jede kleine Zifer über der Zahl M = $\overset{5}{9}\overset{4}{9}\overset{3}{8}\overset{2}{7}\overset{1}{3}\overset{0}{5}$, was vor eine Stelle eine jede Zifer der Zahl M zur Linken der schlechten einer einnimmt. Z. E. 4 über der 9 zeigt an, daß die 9 in der 4ten Stelle zur Linken der Einer stehet. Daher haben diese kleine Zifern auch den Nahmen Exponenten der Ordnung bekommen (§. 3) die hier in M positiv sind.

2) Sagen eben die positiven Exponenten der Zahl M, daß an eine jede Zifer der

Zahl M eben so viel Nullen zur Rechten gehänget werden sollen, als der Exponent der Ord. Einheiten hat. So ist $\overset{3}{8}$ in M so viel als 8000 oder 8 mit 3 Nullen zur Rechten.

3) Siehet man leicht, daß die positiven Exponenten der Ordn. der Zahl M zu erkennen geben, in was vor eine Potenz der 10 jede Zifer der Zahl M multipliciret sey. Es ist $\overset{3}{8}$ eben so viel als $8 . 10^3$ oder 8 von der dritten Ordnung ist eben so viel als 8 multipliciret in die dritte Potenz von 10. Denn $\overset{3}{8}$ ist $= 8000 = 8 . 1000 = 8 . 10^3$, weil $1000 = 10 . 10 . 10 = 10^3$.

## §. 6.

Hat man eine Zahl N = 56, 834, wo das Comma bey 6 anzeigt, daß zur Rechten der 6 decimalzifern d. i. solche Zifern folgen sollen, welche zehntheilchen, hunderttheilchen und tausendtheilchen von der schlechten Einheit enthalten; je nachdem solche Zifern in der ersten, zweyten, dritten Stelle zur Rechten der 6 oder des Commatis stehen: so kann der Unterschied dieser Zifern durch die positiven und negativen Exponenten der Ordn. angezeigt werden. Wie also zur Linken der Einer die Zifern immer 10 fach wachsen; so nehmen sie zur Rechten der Einer immer zehnfach ab.

## §. 7.

Deutet man also die zehner, hunderter, tausender u. s. w. mit den positiven Zifern 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 ꝛc. an; so können die negativen Zifern —1, —2—3—4 ꝛc. die zehntheilchen, hunderttheilchen, tausendtheilchen bedeuten. Es läßt sich also die Zahl N = 56, 834 auch so schreiben $5^{1}6^{0}, 8^{-1}3^{-2}4^{-3}$. Und so können diese negative Zifern negative Exponenten der Ordnung heissen.

## §. 8.

Die negative Exponenten der Ordnung der Zahl N = $56, 8^{-1}\,3^{-2}\,4^{-3}$ haben folgende Bedeutung:

1) Bestimmen sie den Ort, welchen die Zifern der Zahl N zur Rechten der schlechten Einer einnehmen; d. i. sie geben zu erkennen, wie viel Nullen linker Hand denselben angehänget werden sollen. Z. E. $4^{-3}$ ist = 0,004 das heißt 4 nimmt zur Rechten der Einer die dritte Stelle ein.

2) Zeigen die negativen Exponenten der Zahl N solche Brüche an, wovon die Zifern der Zahl N die Zähler, die Nenner aber eine eins mit so viel Nullen sind als die negativen Exponenten der Ord. Einheiten haben.

So

So ist $\overset{-3}{4} = \frac{4}{1000}$ oder gleich viertausend theilchen von der schlechten Einheit.

3) Sagen eben diese Exponenten, in was vor eine negative Potenz der 10 die zur Rechten der Einer stehende Zifern der Zahl N multipliciret werden sollen. Es ist nämlich $\overset{-3}{4} = 4 \cdot \overset{-3}{10}$. Denn $\overset{-3}{4}$ ist $= \frac{4}{1000}$ $= 4 \cdot \frac{1}{1000} = 4 \cdot \frac{1}{10^3} = 4 \cdot \overset{-3}{10}$; weil $\frac{1}{10^3} = \overset{-3}{10}$ ist (§ 3).

## §. 9.

Sollen Zifern von verschiedenen positiven Exponenten der Ordnung mit einander multipliciret werden; so darf man nur die Zifern multipliciren, und die Exponenten der Ordnung addiren. Es sey z. E. $\overset{3}{6}$ mit $\overset{5}{9}$ zu multipliciren; so wird das Product $\overset{8}{54}$ seyn: denn $\overset{3}{6}$ ist $= 6000$; $\overset{5}{9}$ ist $= 900000$ (§ 5) folglich $\overset{3}{6} \cdot \overset{5}{9} = 6000 \cdot 900000 = 5400000000 = \overset{8}{54}$. Ist aber die Zahl $\overset{3}{934}$ mit $\overset{2}{23}$ zu multipliciren; so multiplici-

tiplici-

tipliciret man 934 mit 23 und über die niedrigste Zifer des Products setzet man die Summe der beyden Exponenten der Ordnung. Also $\overset{3}{934}\cdot\overset{2}{23}$ ist $= \overset{5}{21482} = 2148200000$.

## §. 10.

Sind Zifern mit positiven und negativen Exponenten der Ordnung zu multipliciren; so werden wieder die Ziffern multipliciret und über des Products niedrigste Zifer die Summe der verschiedenen Exponenten gesetzet.

Bey der Summe muß man sich an die Sätze von den positiven und negativen Grösen erinnern, wie solche Grössen addiret werde. Nemlich man ziehet die kleinere von der grösseren ab, und setzet vor den Rest das Zeichen der grössern. Also $\overset{6}{7}\cdot\overset{-3}{4}$ ist $= \overset{3}{28}$. Denn $\overset{6}{7}$ ist $= 7000000$, und $\overset{-3}{4}$ ist $= \frac{4}{1000}$; (§ 8) folglich $\overset{6}{7}\cdot\overset{-3}{4} =$

$$7000000\cdot\frac{4}{1000}; = \frac{2800000}{1000} = 28000$$

$$= \overset{3}{28} = \overset{6-3}{28}.$$

Eben so wenn die Zahl $\overset{-5}{452}$ mit $\overset{2}{26}$ multipliciret werden soll; so darf man nur die Zahlen mit einander multipliciren, und über des Products niedrig-

niedrigste Zifer, die Summe der beyden Exponenten $-5+3$ d. i. $-2$ setzen; alsdann ist die Multiplication verrichtet. Nemlich $\overset{-5}{452} \cdot \overset{3}{26}$ ist $= \overset{-2}{11752} = 117,52$. Dann $\overset{-5}{452}$ ist $=$ $\frac{452}{100000}$ (§ 8); $\overset{3}{26} = 26000$ (§ 5); folglich

$$\overset{-5}{452} \cdot \overset{3}{26} = \frac{452}{10\,0000} 26000 = \frac{11752000}{100000} =$$

$$\frac{11752}{100} = \frac{11752}{10^2} = \frac{11752 \cdot 1}{10^2} = 12752 \cdot 10^{-2}$$

$$= \overset{-2}{11752} = 117,52;\ (§\ 8).$$

§. 11.

Wenn man Zifern mit einander zu multipliciren hat, die beyde negative Exponenten der Ord. haben; so macht man wie gewöhnlich das Product von diesen Zifern, und setzet über die niedrigste Zifer desselben die Summe der negativen Exponenten der Ord. So ist $\overset{-3}{8} \cdot \overset{-2}{6} = \overset{-5}{48}$. Denn $\overset{-3}{8}$ ist $= \frac{8}{1000}$; und $\overset{-2}{6} = \frac{6}{100}$ (§ 8); also

$$\overset{-3}{8} \cdot \overset{-2}{6} = \frac{8}{1000} \cdot \frac{6}{100} = \frac{48}{100000} = \frac{48}{10^5}$$

$$= \frac{48 \cdot 1}{10^5} = 48 \cdot 10^{-5} = \overset{-5}{48}\ (§ 8).$$

Haben zwo Zahlen, die mit einander multipliciret werden sollen, auf ihren niedrigsten Zifern negative Exponenten; so verrichte man die Multiplication dieser Zahlen, und über des Products niedrigste Zifer setze man die Summe dieser Exponenten; so ist die Multiplication geschehen. Ist $\overset{-4}{563}$ mit $\overset{-3}{67}$ zu multipliciren; so ist $\overset{-4}{563} \cdot \overset{-3}{67}$ $= \overset{-7}{37721}$; denn $\overset{-4}{563}$ ist $= \frac{563}{10000}$; $\overset{-3}{67} = \frac{67}{1000}$ (§ 8) Also $\overset{-4}{563} \cdot \overset{-3}{67}$ ist $= \frac{563}{10000} \cdot \frac{67}{1000} = \frac{37721}{10000000} = \frac{37721}{10^7} = 37721 \cdot \frac{1}{10^7}$ $= 37721 \cdot 10^{-7} = \overset{-7}{37721}$ (§ 8).

## §. 12.

Zifern von verschiedenen positiven Exponenten der Ord. in einander zu dividiren; hat man nur nach geschehener Division beyder Zifern, den Exponenten der Ord. des Divisors vom Exponenten des dividendi abzuziehen, und den Rest dieser Exponenten über den Quotient zu setzen; um den völligen Quotienten zu erhalten. Es seye nämlich 1) $\overset{5}{8}$ mit $\overset{3}{4}$ zu dividiren; so ist $\overset{5}{8} : \overset{3}{4} =$ $\overset{5-3}{2} = \overset{2}{2} = 200$: denn $\overset{5}{8}$ ist $= 800000$ u.

$\overset{3}{4} =$

$\overset{3}{4} = 4000$ (§ 5); folglich $\overset{5}{8} : \overset{3}{4} = 800000 : 4000 = 200 = \overset{2}{2} = \overset{5}{8} : \overset{3}{4}$.

2) $\overset{3}{9} : \overset{5}{4} = \overset{-2}{2\frac{1}{4}}$; denn $\overset{3}{9} = 9000$ u. $\overset{5}{4} = 400000$ also $\overset{3}{9} : \overset{5}{4} = 9000 : 400000 = \frac{9000}{400000} = \frac{9}{400} = \frac{9}{4 . 100} = \frac{9}{100} : 4 = \frac{9 : 4}{100} = \frac{2\frac{1}{4}}{100} = \frac{2\frac{1}{4}.}{10^2} = 2\frac{1}{4} . \frac{1}{10^2} = 2\frac{1}{4} . \overset{-2}{10}$ (§. 8) $= \overset{-2}{2\frac{1}{4}} = \overset{3}{9} : \overset{5}{4}$.

Wie die Division mit den einzeln Zifern verrichtet worden; eben so geschiehet sie auch mit Zahlen. Nur muß man bey den Zahlen die Exponenten der Ord. auf den niedrigsten Zifern derselben bemerken, als welche von einander abgezogen werden.

So ist 1) $\overset{3}{36} : \overset{2}{12} = \overset{3-2}{3} = \overset{1}{3} = 36000 : 1200 = 30$.

2) $\overset{5}{11752} : \overset{8}{26} = 1175200000 : 2600000000 = \frac{1175200000}{2600000000} = \frac{11752}{26000} = \frac{11752}{26 . 1000} = \frac{11752}{1000} : 26 = \frac{11752 : 26}{1000} = \frac{452}{1000} = \frac{452}{10^3} = 452 \frac{1}{10^3} = 452 . \overset{-3}{10} = \overset{-3}{452} = \overset{5-8}{452}$.

## §. 13.

Wenn einzelne Zifern oder Zahlen mit positiven und negativen Exponenten der Ord. dividiret werden sollen; so verfährt man eben wie im vorhergehenden §.

1) $\overset{3}{12} : \overset{-5}{4} = \overset{3+5}{3} = \overset{8}{3}$. Denn $\overset{3}{12}$ ist $= 12000$;

$\overset{-5}{4} = \frac{4}{100000}$ also $\overset{3}{12} : \overset{-5}{4} = 12000 : \frac{4}{100000}$

$= 12000 . \frac{100000}{4} = 300000000 = \overset{8}{3} =$

$\overset{3+5}{3} = \overset{3}{12} : \overset{-5}{4}$.

2) $\overset{-4}{125} : \overset{3}{25} = \overset{-7}{5}$. Es ist $\overset{-4}{125} = \frac{125}{10000}$;

$\overset{3}{25} = 25000$, also $\overset{-4}{125} : \overset{3}{25}$ ist $= \frac{125}{10000}$ :

$25000 = \frac{125}{10000.25000} = \frac{125}{250000000}$

$= \frac{125}{25.10000000} = \frac{125}{10000000} : 25 =$

$\frac{125 : 25}{10000000} = \frac{5}{10000000} = \frac{5}{10^7} = 5 . \frac{1}{10}$

$= 5 . \overset{-7}{10} = \overset{-7}{5}$ (§ 8) $= \overset{-4-3}{5} = \overset{-4}{125} : \overset{3}{25}$.

## §. 14.

Zifern, oder auch Zahlen die mit mehr Zifern geschrieben sind, mit negativen Exponenten

ten der Ord. über ihren niedrigsten Zifern ineinander zu dividiren, wird nun auch nicht schwer fallen, indem man nur das in beyden vorhergehenden §§ gezeigte Verfahren zu wiederholen brauchet.

$\overset{-2}{16} : \overset{-3}{4}$ ist $= \overset{-2+3}{4} = \overset{1}{4} = 40$; weil $\overset{-2}{16} = \frac{16}{100}$

u. $\overset{-3}{4} = \frac{4}{1000}$ (§ 8); so ist $\overset{-2}{16} : \overset{-3}{4} = \frac{16}{100}$

$\frac{4}{1000} = \frac{16}{100} \cdot \frac{1000}{4} = \frac{16000}{400} = 40$

$= \overset{1}{4} = \overset{-2+3}{4} = \overset{-2}{16} : \overset{-3}{4}$.

§ 15.

Man wird leicht sehen, daß bey den vorhergehenden Sätzen nichts weiter vorausgesetzet wird, als daß man wisse, wie Brüche mit ganzen Zahlen und unter sich multipliciret und dividiret werden. Ferner daß einem nicht unbekant seye, daß eine negative Grösse abziehen, so viel heisse als ihr entgegengesetztes d. i. die Gröse als + addiren, wie man sich auch leicht aus den Beyspielen im 13 und 14 § davon überzeugen kann.

## Von der Quadratwurzel.

§. 16.

Von den einzeln Zifern 1, 2, 3, 4 &c. die Quadrate zu machen, ist leicht, und wird jedem, der das einmal eins kann, schon bekannt seyn.

Will man aber die Quadrate von Zahlen machen die aus etlichen Zifern bestehen; so hat man noch folgendes zu merken:

Die gröste Zahl mit zwo Zifern ist 99 und die kleinste 10. Macht man nun das Quadrat von 99; so kommt 9801 d. i. das Quadrat von 99 hat nur 4 Zifern. Das Quadrat aber von 10 ist = 100; oder das Quadrat von 10 als der kleinsten Zahl mit zwo Zifern hat nur 3 Zifern. Hat man also eine Zahl, die aus 3 oder 4 Zifern bestehet, und man will diese Zahl als ein Quadrat einer andern ansehen; so weiß man schon zum voraus, daß die Quadratwurzel aus zwo Zifern bestehet, oder doch wenigstens bestehen muß wenn die Wurzel eine ganze Zahl seyn soll.

Die gröste Zahl mit 3 Zifern ist 999 und die kleinste 100. Macht man das Quadrat von 999 so wird man finden, daß es aus 6 Zifern bestehet, und das Quadrat von 100 hat 5 Zifern. Also eine Zahl von 6 Zifern hat 3 Zifern und eine von 5 Zifern hat ebenfalls 3 Zifern zur Wurzel. Wenn nämlich eine Zahl von 5 oder 6 Zifern entweder wirklich ein Quadrat ist, oder doch dafür gehalten wird. Und so kann man leicht finden, daß eine Zahl von 7 oder 8 Zifern als Quadrat betrachtet 4 Zifern zur Wurzel: Eine von 9 oder 10 Zifern 5 Zifern zur Wurzel habe ꝛc.

§. 17.

§. 17.

Von einer Zahl die aus zwo Zifern bestehet, die 2te Potenz oder das Quadrat zu machen. Man zerlege die Zahl in zwey Theile; Mache das Quadrat vom ersten Theil; multiplicire hernach den ersten mit dem 2ten, was heraus kommt, verdoppele; endlich noch das Quadrat des 2ten Theils gemacht, und diese 3 Stücke nach den Exponenten der Ordn. die sich auf den niedrigsten Zifern dieser Stücke befinden unter einander gesetzet; so wird das Quadrat von der Zahl formiret seyn. Es sey z. E. das Quadrat von der Zahl $\overset{10}{99}$ zu machen; so ist $\overset{10}{99} = \overset{1}{9} + \overset{0}{9}$: also $(\overset{1}{9})^2 = \overset{2}{81}$ (§ 9); $2.\ \overset{1}{9}.\ \overset{0}{9} = \overset{1}{162}$ (§ 9) u. $(\overset{0}{9})^2 = 81$ (§ 9) folglich

$$\begin{array}{rcr}
(\overset{1}{9})^2 & = & \overline{\overset{210}{\phantom{0}}} \\
 & & 81\phantom{0} \\
2.\ \overset{1}{9}.\ \overset{0}{9} & = & 162\phantom{0} \\
(\overset{0}{9})^2 & = & 81 \\
\hline
(\overset{10}{99})^2 & = & 9801
\end{array}$$

Um sich von der Richtigkeit dieses Verfahrens zu überzeugen; so setze man die Zahl $\overset{10|}{99}$ einmal getheilet hernach ungetheilet unter einander, und multiplicire sie mit sich selbst; so wird man deutlich sehen, daß beydes einerley ist.

1) Ungetheilt

$$\begin{array}{r} 99 \\ 99 \\ \hline 81\phantom{000} \\ 81\phantom{00} \\ 81\phantom{0} \\ 81 \\ \hline 9801 \end{array}$$

2) Getheilt

$$\begin{array}{rrr} \overset{1}{9} & +\overset{0}{9} & \\ \overset{1}{9} & +\overset{0}{9} & \\ \hline \overset{2}{81} & +\overset{1}{81} & \\ & +\overset{1}{81} & +\overset{0}{81} \\ \hline \overset{2}{81} & +2.\overset{1}{81} & +\overset{0}{81} \end{array}$$

Setzet alles in 2) der Ordnung nach untereinander; so kommt eben die Stellung heraus, die gleich anfangs gemacht wurde. Denn es ist

$$\begin{array}{lr|l} & 2 & 10 \\ \hline (\overset{1}{9})^2 = & 81 & \\ 2.\overset{1}{9}.\overset{0}{9} = 2.\overset{1}{81} = & 16 & 2 \\ (\overset{0}{9})^2 = \overset{0}{81} = & & 81 \\ \hline (99)^2 = (\overset{1}{9}+\overset{0}{9})^2 = & 98 & 01 \end{array}$$

Theilet man die Zifern dieses gefundenen Quadrates von der Rechten zur Linken in Classen, und gibt jeder Classe zwo Zifern; so siehet man leicht, daß in der ersten Classe von der Linken zur Rechten das Quadrat von $\overset{1}{9}$ d. i. das Quadrat vom

ersten

ersten Theil der Zahl oder Wurzel $\overset{10}{99}$; In der ersten Zifer der 2ten Classe das doppelte Product aus $\overset{1}{9}$, als dem ersten Theil in $\overset{0}{9}$ als den 2ten Theil; und in der letzten Zifer der 2ten Classe das Quadrat von $\overset{0}{9}$ als dem 2ten Theil der Wurzel enthalten ist.

§. 18.

Aus der vorigen Zusammensetzung des Quadrats von $\overset{10}{99}$, läßt sich leicht übersehen, daß da wo das Quadrat vom ersten Theil d. i. von $\overset{1}{9}$ stehet, auch noch andere Zifern von dem doppelten Producte aus dem ersten Theil der Wurzel in den 2ten hinzuliegen kommen, die also bey der Addition zu dem Quadrate vom ersten Theil hinzukommen.

Dieses könnte zweifelhaft machen, ob nicht in der ersten Classe von der Linken zur Rechten, ein Quadrat einer grössern Zahl enthalten seye, als das Quadrat von der Zifer $\overset{1}{9}$ oder als das Quadrat von dem ersten Theil der Zahl $\overset{10}{99}$.

Allein ein $\overset{1}{1}$ oder ein eins von der ersten Ordnung ist grösser als $\overset{0}{9}$ oder als neune von der Nullordnung; d. i. ein Zehner ist grösser als 9 schlechte Einheiten. Folglich ist auch das Qua-

drat von $\overset{1}{9} + \overset{1}{1} = \overset{1}{1}0$; d. i. das Quadrat von zehn Zehner grösser, als das Quadrat $\overset{1}{9} + \overset{0}{9}$ oder als das Quadrat von neun Zehner und neun schlechten Einheiten. Also kan auch in der ersten Classe des vorigen Exempels kein Quadrat von mehreren Zehner enthalten seyn als das Quadrat von $\overset{1}{9}$ oder als das Quadrat von neun Zehner.

§. 19.

Da aus §. 16. schon bekannt ist, daß eine Zahl von 3 oder 4 Zifern als ein Quadrat betrachtet, zwo Zifern zur Wurzel hat; so wird es nicht schwer fallen, aus der Zahl 9801 die Quadratwurzel zu suchen, wenn man die vorige Zusammensetzung dieses Quadrats recht verstanden hat. Man theilt nemlich die Zahl 9801 von der Rechten zur Linken in Classen, und gibt jeder Classe zwo Zifern, die höchste davon zur Linken kan auch nur eine Zifer haben. Aus §. 17. am Ende weiß man auch, was man in jeder Classe zu suchen hat. Die Ausziehung der Quadratwurzel aus 1801 wird auf folgende Art vorgenommen.

1) Nach Eintheilung dieser Zahl in Classen denkt man auf eine Zifer, deren Quadrat so groß oder etwas kleiner ist als die Zifern in der höchsten Classe zur Linken. Der gefundenen Zifer Quadrat ziehet man in der höchsten Classe ab. Was übrig bleibt, nimmt man

man zu der ersten Zifer der zweiten Classe und nimmt

2) Den gefundenen ersten Theil der Wurzel 2mal; sezet dieses Product so unter den Rest aus der ersten Classe und der ersten Zifer der folgenden, daß des Products niedrigste Zifer gerade unter die erste der 2ten Classe zu stehen kommt, schliesset solches in zwo Clammern ein, und sehet zu, wie oft es in der über ihm stehenden Zahl enthalten ist. Wobey man sich jedoch in Acht zu nehmen hat, daß man den Quotienten weder zu groß noch zu klein annimmt. Dieser gefundene Quotient ist der 2te Theil der Wurzel. Weil in der ersten Zifer der 2ten Classe das doppelte Product aus dem ersten Theil in den 2ten Theil der Wurzel vorkommt; so multiplicire man den neuen Quotienten mit dem doppelten des ersten Theils, das schon da stehet, und dieses neue Product ziehe man ab. Was nun noch übrig ist nehme man

3) zu der 2ten Zifer der 2ten Classe; mache das Quadrat von dem 2ten Theile der Wurzel, und seze es mit seiner niedrigsten Zifer wieder unter die lezte Zifer dieser Classe; ziehe solches ab; so hat man die Wurzel richtig gefunden.

$$\begin{array}{rrl} & \overset{3\,2}{98}, \overset{10}{01} & \big|\; \overset{10}{\overline{\phantom{0}}} \\ & & \;\; 99 \\ (\overset{1}{9})^2 = & 81 & \\ \hline & \overset{\;}{170} & \\ (2.\overset{1}{9}) = & (18) & \\ \overset{1}{2}.\; \overset{0}{9}.\; 9 = & 162 & \\ \hline (\overset{0}{9})^2 = & ..81 & \\ & 81 & \\ \hline & .. & \end{array}$$

So wie man bey diesem Exempel verfahren hat, eben so verfähret man bey jeder Zahl, die 3 oder 4 Zifern hat. Und wenn es am Ende nicht aufg het, auch der 2te Theil der Wurzel nicht zu klein angenommen worden; so ist es ein sicheres Kennzeichen, daß die Zahl kein eigentliches Quadrat gewesen. wie in solchem Fall weiter zu verfahren ist, wird in der Folge deutlich gewiesen werden.

## §. 20.

Hat eine Zahl M mehr als zwo Zifern, und man soll davon das Quadrat machen; so kann es auf eine ähnliche Art wie § 17 geschehen. Um die Sache desto besser und richtiger einzusehen, stelle man sich vor, es sey überhaupt von einer Zahl M das Qnadrat zu machen, wovon die Zifern nach und nach für den ersten Theil und die

nächst

nächst drauf folgende für den 2ten Theil angesehen werden könne; so wird a einen jeden ersten Theil und b einen jeden 2ten bedeuten. Weil vor die Buchstaben alle mögliche Zahlen gesetzet werden können. Folglich wird das Quadrat von (a + b) eine allgemeine Formel abgeben, wornach sich das Quadrat einer jeden Zahl M zusammensetzen lässet. Das Quadrat von a + b wird eben so erhalten, wie § 17. Nämlich man macht das Quadrat von a; multipliciret a mit b und das Product noch mit 2; hernach das Quadrat von b; so ist die Formul $= a^2 + 2ab + b^2$ wie nachstehende Rechnung zeiget.

$$\begin{array}{r} a + b \\ a + b \\ \hline a^2 + ab \qquad \\ + ab + b^2 \\ \hline a^2 + 2ab + b^2 \end{array}$$

In dem nächstfolgenden (§ 21) soll die Anwendung dieser Formel deutlich gewiesen werden; wobey man auch zugleich den Nutzen von den 14 ersten §§ augenscheinlich sehen wird, wenn man sich solche, wie ich wünsche, wohl bekannt gemacht hat.

## §. 21.

Soll von der Zahl $M = \overset{5}{9}\overset{4}{9}\overset{3}{8}\overset{2}{7}\overset{1}{3}\overset{0}{5}$ das Quadrat formiret werden; so kann dasselbe nach obiger allgemeinen Formul nach und nach zusammengesetzet

setzet werden. Man macht 1) das Quadrat von $\overset{5}{9}\overset{4}{9}$, wo $\overset{5}{9}$, a und $\overset{4}{9}$, b bedeutet, ist dieß geschehen; so lasse man in $\overset{5}{9}\overset{4}{9}$ den Exponent der Ord. 5 über der 9 weg; daß aus $\overset{5}{9}\overset{4}{9}$ nun $9\overset{4}{9}$ wird. Denn wenn in $9\overset{4}{9}$ die Ordnung der 9 zur rechten Hand bestimmt ist; so gibt sich die Ordnung der andern 9 von selbsten. Nun multiplicire man 2) $9\overset{4}{9}$ mit $\overset{3}{8}$ und nehme was heraus kommt zweymal, weil $9\overset{4}{9}$ für a, wovon das Quadrat eben gemacht worden, und $\overset{3}{8}$ für b angesehen wird. Ferner mache man das Quadrat von $\overset{3}{8}$; so ist von den ersten drey Theilen $\overset{5}{9}\overset{4}{9}\overset{3}{8}$ das Quadrat fertig. Da aber das Quadrat von $\overset{5}{9}\overset{4}{9}\overset{3}{8}\overset{2}{7}$ zu machen ist; so sehe man die ersten 3 Theile $\overset{5}{9}\overset{4}{9}\overset{3}{8}$ als a und den letzten $\overset{2}{7}$ als b an. Von $\overset{5}{9}\overset{4}{9}\overset{3}{8}$ d. i. von a ist das Quadrat schon gemacht. Man hat also nur noch 3) nöthig a mit b d. i. $\overset{5}{9}\overset{4}{9}\overset{3}{8}$ mit $\overset{2}{7}$ zu multipliciren, was heraus kommt zu verdoppeln, hernach das Quadrat von b d. i. von $\overset{2}{7}$ zu machen; so ist das Quadrat von $\overset{5}{9}\overset{4}{9}\overset{3}{8}\overset{2}{7}$ als den vier

ersten

ersten Theilen der Wurzel formiret. Bey der Multiplication der 3 ersten Theilen $\overset{5}{9}\overset{4}{9}\overset{3}{8}$ mit $\overset{2}{7}$ läßt man die Exponenten der Ord. 5, 4 über 99 ganz weg und behält nur den Exp. der Ord. über $\overset{3}{8}$; so daß aus $\overset{5}{9}\overset{4}{9}\overset{3}{8}$ jetzt $99\overset{3}{8}$ wird. Denn hat man den Exp. der Ord. über 8; so geben sich die übrige von selbsten. Ferner das Quadrat von $\overset{5}{9}\overset{4}{9}\overset{3}{8}\overset{2}{7}\overset{1}{3}$ zusammen zu setzen, nimmt man $\overset{5}{9}\overset{4}{9}\overset{3}{8}\overset{2}{7}$ für a und $\overset{1}{3}$ für b an, da man denn wieder in $\overset{5}{9}\overset{4}{9}\overset{3}{8}\overset{2}{7}$ alle Exp. der Ord. bis auf den über der $\overset{2}{7}$ weg lässet, daß aus $\overset{5}{9}\overset{4}{9}\overset{3}{8}\overset{2}{7}$ nun $998\overset{2}{7}$ wird. Weil das Quadrat von $998\overset{2}{7}$ schon da stehet, so hat man 4) nur $998\overset{2}{7}$ mit $\overset{1}{3}$ zu multipliciren, das daraus entstandene Product zu verdoppeln und denn das Quadrat von $\overset{1}{3}$ zu machen; so hat man auch das Quadrat von den 5 ersten Theilen d. i. von $\overset{5}{9}\overset{4}{9}\overset{3}{8}\overset{2}{7}\overset{1}{3}$ geendigt. Endlich noch das Quadrat von $\overset{5}{9}\overset{4}{9}\overset{3}{8}\overset{2}{7}\overset{1}{3}\overset{0}{5}$ zu machen, lässet man $\overset{5}{9}\overset{4}{9}\overset{3}{8}\overset{2}{7}\overset{1}{3}$, a und $\overset{0}{5}$, b bedeuten, wo man denn in $\overset{5}{9}\overset{4}{9}\overset{3}{8}\overset{2}{7}\overset{1}{3}$ wieder alle Exp. der Ord. bis auf den über der $\overset{1}{3}$ wegläßet; so daß jetzt a

$= 9987\overset{1}{3}$

$= \overset{1}{99873}$ wird. Aber von $\overset{1}{99873}$ wurde kurz vorher das Quadrat gemacht; es ist also nur noch 5) nöthig, daß man $\overset{1}{99873}$ mit $\overset{0}{5}$ multipliciret, was heraus kommt zweymal nimmt; und das Quadrat von $\overset{0}{5}$ macht; so ist von der Zahl $\overset{543210}{998735} = M$ das ganze Quadrat zusammengesetzet. Die einzelne Quadrate, woraus das ganze Quadrat von $\overset{543210}{998735}$ bestehet, folgen der Ordnung nach also: daß A das Quadrat von den beyden ersten Theilen der Wurzel bedeutet: B das Quadrat von den drey ersten Theilen: C das von den vier ersten Theilen: D das von den 5 ersten Theilen: E das von den sechs ersten Theilen der Wurzel. Die ganze Rechnung vom vorigen Exempel wird etwa so aussehen:

$$M = \underset{a\;+\;b}{\overset{543210}{998735}}$$

$$\left(\overset{5}{9} + \overset{4}{9}\right)^2 = (a + b)^2$$

$$\left(\overset{5}{9}\right)^2 = \overset{5}{9}.\overset{5}{9} = \overset{10\;9\;8}{\overline{81}} = a^2$$

$$2.\overset{5}{9}.\overset{4}{9} = 162 = 2ab$$

$$\left(\overset{4}{9}\right)^2 = \overset{4}{9}.\overset{4}{9} = 81 = b^2$$

---

$$\left(\overset{4}{99}\right)^2 = \overset{4}{99}.\overset{4}{99} = 9801 = A$$

M =

$$M = \overset{43210}{998735}$$
$$a + b$$

$$\left(\overset{4}{99}+\overset{3}{8}\right)^2 = (a+b)^2$$

$$\left(\overset{4}{99}\right)^2 = \overset{4}{99}\cdot\overset{4}{99} = \overline{\overset{876}{9801}} = A = a^2$$
$$2.\ \overset{4}{99}.\ \overset{3}{8} = 1584 = 2ab$$
$$\left(\overset{3}{8}\right)^2 = \overset{3}{8}.\ \overset{3}{8} = 64 = b^2$$

---

$$\left(\overset{3}{998}\right)^2 = 996004 = B$$

$$M = \overset{3210}{998735}$$
$$a + b$$

$$\left(\overset{3}{998}+\overset{2}{7}\right)^2 = (a+b)^2$$

$$\left(\overset{3}{998}\right)^2 = \overset{3}{998}\cdot\overset{3}{998} = \overline{\overset{654}{996004}} = B = a^2$$
$$2.\ \overset{3}{998}.\overset{2}{7} = 13972 = 2ab$$
$$\left(\overset{2}{7}\right)^2 = \overset{2}{7}.\ \overset{2}{7} = 49 = b^2$$

---

$$\left(\overset{2}{9987}\right)^2 = 99740169 = C.$$

$$M = \overset{210}{998735}$$
$$a + b$$

$$\left(\overset{2}{9987}\right)$$

$$(\overset{2}{9987} + \overset{1}{3})^2 = (a + b)^2$$

$$(\overset{2}{9987})^2 = 9974\overset{4\,3\,2}{\overline{0169}} = C = a^2$$

$$2 \cdot \overset{2}{9987} \cdot \overset{1}{3} = 59922 = 2ab$$

$$(\overset{1}{3})^2 = \overset{1}{3} \cdot \overset{1}{3} = 9 = b^2$$

$$(\overset{1}{99873})^2 = 9974616129 = D.$$

$$M = \overset{10}{998735}$$
$$a + b$$

$$(\overset{1}{99873} + \overset{0}{5})^2 = (a + b)^2$$

$$(\overset{1}{99873})^2 = 997461\overset{2\,1\,0}{\overline{6129}} = D = a^2$$

$$2 \cdot \overset{1}{99873} \cdot \overset{0}{5} = 998730 = 2ab$$

$$(\overset{0}{5})^2 = \overset{0}{5} \cdot 5 = 25 = b^2$$

$$(998735)^2 = 997471600225 = E$$

Folglich ist das Quadrat von 998735 = M der Zahl

$$\overset{11}{9}\ \overset{10}{9}\ \overset{9}{7}\ \overset{8}{4}\ \overset{7}{7}\ \overset{6}{1}\ \overset{5}{6}\ \overset{4}{0}\ \overset{3}{0}\ \overset{2}{2}\ \overset{1}{2}\ \overset{0}{5} = M^2$$

gleich oder

10 ✠ 1 10 10'1 10'2 10'3 10.4 10'5 10'6 10'7 10'8 10'9 10'10
= 9 9 7 4 7 1 6 0 0 2 2 5
2.5 ✠ 1 2.5 2.5'1 2.5'2. 25'32 5'4.25'62.5'72.5'82.5'92.5'10
= 9 9 7 4 7 1 6 0 0 2 2 5

1 Zus. Wenn man alle Quadrate A, B, C, D woraus obiges Quadrat E bestehet, jedes insbesondere durchgehet; so wird man finden, daß um das nächstfolgende Quadrat B zu machen, nur nöthig ist, zu dem kurz vorhergehenden Quadrate A, oder welches einerley ist, zu dem Quadrate der beyden vorhergehenden Theilen, das doppelte Product aus eben diesen Theilen in den drauf folgenden dritten oder neuen Theil, nebst dem Quadrat des dritten oder neuen Theils der Wurzel zu addiren. Um das Quadrat C d. i. das Quadrat von den 4 ersten Theilen der Wurzel zu erhalten, zähle man zu dem Quadrate B oder zu dem Quadrate der 3 ersten Theilen das doppelte Product aus eben diesen Theilen in den 4ten und das Quadrat des 4ten Theils der Wurzel. Und überhaupt das folgende Quadrat D zu machen, setze man zu dem vorhergehenden Quadrate C das doppelte Product aus den Theilen der Wurzel, wovon C das Quadrat ist, in den folgenden neuen nebst dem Quadrate des neuen oder folgenden Theils.

2 Zus. Bey obiger Zusammensetzung des Quadrats von der Zahl M fällt gleich in die Augen, daß in dem Quadrate von E die Quadraten von allen einzeln Theilen der Zahl oder Wurzel M vorkommen.

3 Zus. Auch lässet sich aus dem Quadrate E leicht einsehen, daß um das Quadrat von M zu machen; nicht nur die Quadraten von jedem Theile

der Zahl M erfodert werden; sondern daß auch noch alle doppelte Producte nöthig sind, welche entstehen, wenn die nächst vorhergehenden Theile mit dem nächstfolgenden multipliciret werden und was heraus kommt verdoppelt wird.

4 Zus. Alle Quadrate von den einzeln Theilen der Zahl M fangen in den graden, und alle doppelte Producte in den ungeraden Ordnungen an.

5 Zus. Man hat also bey der Zusammensetzung des Quadrats von M wohl zu merken, was vor Exponenten der Ordn. über der niedrigsten Zifer eines einzeln Quadrates oder doppelten Productes vorkommen. Denn nach solchen werden die Quadraten und Producte untereinandergesetzet.

6 Zus. Macht man das Quadrat von den beyden höchsten Zifern der Zahl M $= \overset{5}{9}\overset{4}{9}\overset{3}{8}\overset{2}{7}\overset{1}{3}\overset{0}{5}$; so wird sich finden, daß das Quadrat der höchsten Zifer $\overset{5}{9}$; das doppelte Product aus $\overset{5}{9}$ in $\overset{4}{9}$ d. i. aus dem ersten Theil in den 2ten der Zahl M; auch nicht einmal die Summe des Quadrats und des doppelten Products, eine Zifer von der Ordnung $2.5 + 2 = 10 + 2 = 12$ haben. Denn das Quadrat von $\overset{5}{9}$ hat nur zwo Zifern $= \overset{2.5+1}{8}\ \overset{2.5}{1}$; wovon die niedrigste von der Ordnung $2.5 = 10$; die höchste aber von der Ordnung

2. 5 + 1 = 10 + 1 = 11 ist und also nicht 2. 5 + 2 = 10 + 2 = 12. Das doppelte Product hat 3 Zifern, $\overset{2.5+1}{1}\ \overset{2.5}{6}\ \overset{2.5-1}{2} = \overset{11}{1}\ \overset{10}{6}\ \overset{9}{2}$ worin also keine Zifer von der Ordnung 2. 5 + 2 = 10 + 2 = 12 vorkommt. Die Summe von beyden ist $= \left(\overset{5}{9}\right)^2 + 2.\ \overset{5}{9}.\ \overset{4}{9}$

| = 2. 5 + 1 | 2. 5 | 2. 5 − 1 |
|---|---|---|
| 8 | 1 | |
| 1 | 6 | 1 |
| 9 | 7 | 1 |

In dieser Summe ist wiederum keine Zifer zu finden, die von der Ordnung 2. 5 + 2 = 10 + 2 = 12 wäre. Weil hier die zwo grösten Zifern zu den beyden höchsten der Zahl M angenommen worden sind; so kann man den Beweiß auf jede zwo auf einander folgende Zifern anwenden.

7 Zus. Wenn zu dem höchsten Exponenten der Ord. einer Zahl M = $\overset{543210}{998735}$ eins addiret wird; so zeiget die Summe die Menge der Zifern an, die die Zahl M ausmachen. So ist 5 + 1 = 6 gleich der Menge der Zifern, woraus die Zahl $\overset{543210}{998735}$ bestehet. Und wenn überhaupt von einer jeden andern Zahl N der höchste Exponent der Ord. n hiese; so ist die Menge der einzeln Zifern der Zahl N = n + 1.

Man kann eine jede Zahl $M = \overset{543210}{998735}$ in zwey Theile zerlegen und zwar so, daß man in den ersten Theil nur die höchste Zifer der Zahl M und in den andern alle übrige Zifern derselben nimmt. So wird aus $M = \overset{543210}{998735}$ nun $\overset{5}{9} + \overset{43210}{98735}$ werden, welche man auch so ausdrücken kann $9.\ 10^5 + \overset{43210}{98735}$ (§ 5). Da nun $\overset{5}{1} = 1.\ 10^5$ (§ 5) grösser ist als $\overset{43210}{98735}$; so ist auch $\overset{5}{9} + \overset{5}{1} = 9.\ 10^5 + 1.\ 10^5 = (9 + 1)\ 10^5$ grösser als $\overset{543210}{998735}$. Denn $1.\ 10^5 > \overset{43210}{98735}$ auf beyden Seiten $\overset{5}{9} = 9.\ 10^5$ (§ 5) addiret gibt $\overset{5}{9} + \overset{5}{1} = 9.\ 10^5 + 1.\ 10^5 > \overset{543210}{998735}$ d. i. grösser als M. Macht man daher von der Zahl M das Quadrat; so kann man da, wo das Quadrat des Theils der Zahl M hingesetzet wird, welcher den höchsten Exponenten der Ord. hat, bey Ausziehung der Quadratwurzel (nach diesem und dem vorhergehenden Zusatze) kein Quadrat einer grössern Zifer abziehen, als das von der höchsten d. i. von der Zifer der Zahl M, welche den höchsten Exponenten der Ordn. hat. So kann in dem vorigen Exempel da, wo das Quadrat von $\overset{5}{9}$ bey der Zusammensetzung des Quadrats von M hingeleget worden, keines einer grössern Zifer als das

von $\overset{5}{9}$

$\overset{5}{9}$ abgezogen werden. Obgleich in der nämlichen Stelle, wo das Quadrat von $\overset{5}{9}$ stehet noch andere Zifern hinzukommen; wie voriger Zusatz nebst diesem deutlich zeigen. Oder wie man auch aus dem Quadrate A sehen kann. Zur mehrerer Bestätigung dieses Satzes nehme man eine $\overset{5+1}{1} = \overset{6}{1} = 1.\,10^6$ (§ 5) oder eine eins von der 6ten Ordnung; so ist ein solches $\overset{5+1}{1} = \overset{6}{1} = 1.\,10^6$ grösser als $\overset{543210}{998735} = M$. Folglich wenn man das Quadrat von $\overset{5+1}{1} = \overset{6}{1} = 1.\,10^6$ macht; so muß dieses grösser seyn als das von $\overset{543210}{998735} = M$. Das Quadrat von $\overset{5+1}{1} = \overset{6}{1} = 1.\,10^{5+1} = 1.\,10^6$ ist $= \left(\overset{5+1}{1}\right)^2 = \left(1.\,10^{5+1}\right)^2 = \overset{5+1}{1}.\,\overset{5+1}{1} = \overset{6}{1}.\,\overset{6}{1} = \overset{2.5+2}{1} = 1.\,10^{2.5+2} = 1.\,10^{12} = \overset{12}{1}$. Da nun dieses Quadrat grösser ist als das von $M = \overset{543210}{998735}$; so kann das Quadrat von M keine Zifer von der Ordnung $2.\,5+2 = 12$ haben. Denn hätte das Quadrat von M nur eine einzige Zifer von der Ordnung $2.\,5+2 = 12$; so wäre das Quadrat von M grösser als

das von $1^{5+1} = 1^{6}$. Weil das Quadrat von $1^{5+1} = 1^{6}$ gleich $1^{2.5+2} = 1^{12}$ oder gleich einer 1 mit 12 Nullen ist; so müßte das Quadrat von M gewiß grösser seyn, wenn es nur eine $1^{12}$ oder eine eins mit 12 Nullen hätte, indem es nicht lauter Nullen haben kann, vermöge der Zifern, woraus M bestehet.

8 Zus. Es ist in dem vorigen 6ten und 7ten Zusatze nicht nur deutlich genug gewiesen worden, daß in dem Quadrate von den beyden Zifern der Zahl M, welche die höchsten Exponenten der Ord. 5, 4 haben, nicht nur keine Zifern von der Ord. 2. 5+2 sondern auch daß das ganze Quadrat von der Zahl M keine von der Ordnung 2. 5 + 2 haben kann, wenn nämlich wie hier angenommen worden, der höchste Exponent der Wurzel oder Zahl M 5 ist. Und so wie das von diesem Exempel wahr ist, eben so ist es auch wahr, wenn man statt der 5 eine andere Zifer oder Zahl n für den höchsten Exponenten der Ord. einer anderen Wurzel N annimmt. Das ist es kann das Quadrat der Wurzel N keine Zifer von der Ordnung 2. n + 2 haben. Da also das Quadrat von M = $\overset{5}{9}\overset{4}{9}\overset{3}{8}\overset{2}{7}\overset{1}{3}\overset{0}{5}$ nur höchstens Zifern von der Ordnung 2. 5 + 1 haben kann; so lässet sich leicht finden, wie viel Zifern in dem Quadrate von M vorkommen. Man darf nur das Quadrat von der höchsten

sten Zifer der Wurzel M machen, und zu dem Exponenten der Ordnung der höchsten Zifer eben dieses Quadrats 1 addiren; so zeigt die Summe die Menge der Zifern an, die das ganze Quadrat von M in sich begreift. So ist in unsern Exempel das Quadrat von $9^{5}$ gleich $8^{2.5+1}1^{2.5} = 8^{11}1^{10}$ Das ist die höchste Zifer dieses Quadrats ist von der Ord. 2. 5 + 1; nun noch eins zu diesem Exponenten addiret gibt 2. 5 + 1 + 1 = 2. 5 + 2 = 12 gleich der Anzahl Zifern die das ganze Quadrat von M ausmachen. Wie man auch augenscheinlich sehen kann, wenn man vorne in dem Quadrate E d. i. in dem Quadrat von M die Zifern zählen will. Sollte aber die höchste Zifer in der Wurzel M so klein seyn, daß ihr Quadrat keine zwo Zifern gäbe, wie wenn man statt $9^{5}$ nur $2^{5}$ in M setzen wollte, wovon das Quadrat $4^{2.5} = 4^{10}$ oder gleich 4 von der Ordn. 2. 5 = 10 wäre; so gäbe nun 2. 5 + 1 d. i. zu 2. 5 noch eins addiret, die Menge der Zifern in dem Quadrate von M, worinn $2^{5}$ die höchste Zifer gewesen. Und so kann überhaupt das Quadrat einer Zahl N höchstens nur 2. n + 2, und wenigstens 2. n + 1 Zifern haben, wenn der höchste Exponent der Ord. in der Zahl N, n gesetzet wird. Nämlich das Quadrat von N hat 2. n + 2 Zifern, wenn das Quadrat von der

 höchsten

höchsten Zifer N zwo Zifern hat; 2. n + 1 Zifern aber hat das Quadrat von N wenn das Quadrat der höchsten Zifer von N nur eine Zifer hat, wie man leicht finden kann, wenn statt 5 nun n gesetzet wird.

9 Zus. Eine Zahl von 2. 5 + 2 oder von 2. 5 + 1 Zifer hat als Quadrat betrachtet, 5 + 1 = 6 Zifern zur Wurzel, und 5 ist der höchste Exponent der Wurzel M. Denn ersten Fall lehret das §. 21 gesetzte Beyspiel von der Zahl M, womit man auch noch den vorhergehenden 8ten Zusatz vergleichen kann. Der 2te Fall, da das Quadrat einer Wurzel nur 2. 5 + 1 = 10 + 1 = 11 Zifern hat, obgleich die Wurzel aus 5 + 1 = 6 derselben bestehet, ergibt sich ebenfalls aus dem kurz vorher genannten 8ten Zusatz. Denn dieses letztere eräugnet sich alsdann, wann die höchste Zifer der Zahl M zwar eben den Exponenten der Ordnung hat, sie selbst aber sehr klein d. i. wie im 8ten Zusatz angenommen, etwa nur $\overset{5}{2}$ wäre; folglich das Quadrat der höchsten Zifer der Wurzel M nur aus einer Zifer bestünde, welche von der Ord. 2. 5 = 10 wäre. Da denn zu 2. 5 = 10 eins addiret die Menge der Zifern gleich 2. 5 + 1 = 10 + 1 = 11 von dem Quadrate geben würde. Will man also die Quadratwurzel aus einer Zahl suchen, die entweder wirklich ein Quadrat ist, oder die man doch dafür ansehen kann, und man will schon

zum

zum voraus wissen, wie viel Zifern die Wurzel von diesem Quadrate in sich begreife; so darf man nur den höchsten geraden Exponenten der Ord. desselben aufsuchen, mit zwey dividiren, zum Quotienten 1 addiren; so gibt sich die Menge der Zifern, die die Wurzel in sich begreift. In dem Quadrate E ist der höchste gerade Exponent der Ord. 10; diesen mit 2 dividiret, gibt 5 und dazu 1 addiret; $5 + 1 + = 6$ vor die Menge der Zifern, die die Wurzel oder Zahl M in sich begreift.

10 Zus. Man kann die Theile einer Zahl oder Wurzel M auch durch Buchstaben ausdrükken, und zwar so daß von der höchsten Zifer der Zahl M angefangen wird. Es sey $p + q + r + s + t + u =$ der Zahl $M = \overset{5}{9}\overset{4}{9}\overset{3}{8}\overset{2}{7}\overset{1}{3}\overset{0}{5}$, und $p = \overset{5}{9}$; $q = \overset{4}{9}$; $r = \overset{3}{8}$; $s = \overset{2}{7}$; $t = \overset{1}{3}$; $u = \overset{0}{5}$; So wird von den Buchstaben alles das wahr seyn, was § 21 von den Theilen der Zahl M gelehret worden. Man verfähret nämlich bey der Zusammensetzung des Quadrats von $p + q + r + s + t + u$ eben wie dorten. Man macht 1) das Quadrat von $p + q$; 2) Nimmt man r dazu und läßt $(p + q)$, a und r, b bedeuten; so daß $a + b = (p + q) + r$ wird. Da nun das Quadrat von $p + q$ schon gemacht ist; so macht man nur das doppelte Product aus $(p + q)$ in r; hernach das Quadrat von r;

 Alsdenn

alsdenn ist das Quadrat von p + q + r völlig fertig. 3) Zu p + q + r nimmt man ferner s, und hält (p + q + r) für a, s für b; weil nun das Quadrat von (p + q + r) schon da stehet; so ist nur noch nöthig demselben das doppelte Product aus (p + q + r) in s wie auch das Quadrat von s beyzufügen, um das ganze Quadrat von p + q + r + s zu haben. Will man weiter 4) das Quadrat von p + q + r + s + t haben; so sey jetzt p + q + r + s = a und t = b; von p + q + r + s ist das Quadrat eben gemacht worden. Es mangelt also nur noch das doppelt Product aus p + q + r + s in t und das Quadrat von t; so ist auch dieses Quadrat fertig. Endlich 5) das Quadrat von p + q + r + s + t + u zu bekommen; ist aufs neue a = p + q + r + s + t und b = u. Auch hier ist nur nöthig das doppelte Product aus (p + q + r + s + t) in u und das Quadrat von u dem vorigen Quadrat beyzufügen; so ist das ganze Quadrat von p + q + r + s + t + u völlig zusammengesetzet. Nennet man das Quadrat von (p + q), A: das von (p + q + r) B: das von (p + q + r + s); C: das von (p + q + r + s + t), D: Endlich das von p + q + r + s + t + u, E: so wird die Rechnung stehen wie folget.

1)
$$\begin{array}{r}
p + q \\
p + q \\
\hline
p^2 + pq \qquad\quad \\
+ pq + q^2 \\
\hline
\end{array}$$
$$(p + q)^2 = p^2 + 2pq + q^2 = A$$

2)
$$\begin{array}{l}
(p + q) + r \\
(p + q) + r \\
\hline
(p + q)^2 + (p + q)\, r \\
\qquad\qquad + (p + q)\, r + r^2 \\
\hline
\end{array}$$
$$(p + q)^2 + 2\,(p + q)\, r + r^2 = B$$
$$(p + q + r)^2 = A + 2\,(p + q)\, r + r^2 = B.$$

3)
$$\begin{array}{l}
(p + q + r) + s \\
(p + q + r) + s \\
\hline
(p + q + r)^2 + (p + q + r +)\, s \\
\qquad\qquad\qquad + (p + q + r)\, s + s^2 \\
\hline
(p + q + r)^2 + 2\,(p + q + r)\, s + s^2
\end{array}$$
oder $(p + q + r + s)^2 = B + 2\,(p + q + r)\, s + s^2 = C.$

4)
$$\begin{array}{l}
(p + q + r + s) + t \\
(p + q + r + s) + t \\
\hline
(p + q + r + s)^2 + (p + q + r + s)\, t \\
\qquad\qquad\qquad + (p + q + r + s)\, t + t^2 \\
\hline
\end{array}$$
$$(p + q + r + s)^2 + 2\,(p + q + r + s)\, t + t^2 = D$$
oder $(p + q + r + s + t)^2 = C + 2\,(p + q + r + s)\, t + t^2 = D.$

$$5)\quad \begin{array}{l} (p+q+r+s+t)+u \\ (p+q+r+s+t)+u \\ \hline (p+q+r+s+t)^2+(p+q+r+s+t)\,u \\ \qquad +(p+q+r+s+t)\,u+u^2 \\ \hline (p+q+r+s+t)^2+2\,(p+q+r+s+t)\,u+u^2=E \end{array}$$

oder $(p+q+r+s+t+u)^2 = D + 2\,(p+q+r+s+t)\,u + u^2 = E.$

11 Zus. Die einzelnen Quadraten A, B, C, D, woraus das Quadrat E in § 21 erwachsen ist, lassen sich auch so zusammen setzen, daß ihre einzelne Theile nicht addiret; sondern blos nach ihren Ordnungen untereinander gesetzet werden. Zugleich kann man auch die allgemeine Ausdrükkungen des vorigen Zusatzes zur mehrerer Deutlichkeit mit beysetzen, wie folget

$$\overset{543210}{998735} = \overset{5}{9}+\overset{4}{9}+\overset{3}{8}+\overset{2}{7}+\overset{1}{3}+\overset{0}{5} = p+q+r+s+t+u$$

| | 10 | 9 8 | 7 6 | 5 4 | 3 2 | 1 0 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\left(\overset{5}{9}\right)^2 = \overset{5}{9}\cdot\overset{5}{9} =$ | 81 | | | | | | $= a^2 = p^2$ |
| $2\cdot\overset{5}{9}\cdot\overset{4}{9} =$ | 16 | 2 | | | | | $= 2\,ab = 2\,pq$ |
| $\left(\overset{4}{9}\right)^2 = \overset{4}{9}\cdot\overset{4}{9} =$ | | 81 | | | | | $= b^2 = q^2$ |
| A. | | | | | | | |
| $2\cdot\overset{4}{99}\cdot\overset{3}{8} =$ | 1 | 58 | 4 | | | | $= 2ab = 2\,(p+q)\,r$ |
| $\left(\overset{3}{8}\right)^2 = \overset{3}{8}\cdot\overset{3}{8} =$ | | | 64 | | | | $= b^2 = r^2$ |
| B. | | | | | | | |
| $2\cdot\overset{3}{998}\cdot\overset{2}{7} =$ | | 13 | 97 | 2 | | | $= 2\,ab = 2\,(p+q+r)\,s$ |
| $\left(\overset{2}{7}\right)^2 = \overset{2}{7}\cdot\overset{2}{7} =$ | | | | 49 | | | $= b^2 = s^2$ |
| C. | | | | | | | |
| $2\cdot\overset{2}{9987}\cdot\overset{1}{3} =$ | | | 59 | 92 | 2 | | $= 2ab = 2\,(p+q+r+s)\,t$ |
| $\left(\overset{1}{3}\right)^2 = \overset{1}{3}\cdot\overset{1}{3} =$ | | | | | 9 | | $= b^2 = t^2$ |
| D. | | | | | | | |
| $2\cdot\overset{1}{99873}\cdot\overset{0}{5} =$ | | | 9 | 98 | 73 | 0 | $= 2ab = 2\,(p+q+r+s+t)\,u$ |
| $\left(\overset{0}{5}\right)^2 = \overset{0}{5}\cdot\overset{0}{5} =$ | | | | | | 25 | $= b^2 = u^2$ |
| | 11 10 | 9 8 | 7 6 | 5 4 | 3 2 | 1 0 | |
| E = | 9 9 | 74 | 71 | 60 | 02 | 25 | $= M^2$ |

12 Zus. Aus dieser Zusammensetzung des Quadrats der Zahl $\overset{543210}{M = 998735}$ ist offenbar, daß, wenn man die Zifern dieses Quadrats von der Rechten zur Linken in Classen eintheilt, und jeder Classe zwo Zifern gibt, in der ersten Classe von der Linken zur Rechten gezählet, das Quadrat des ersten Theils der Wurzel M enthalten ist: In der ersten Zifer aber der 2ten Classe fängt sich an das doppelte Product aus dem ersten in den 2ten Theil der Wurzel. In der 2ten Zifer eben dieser Classe stehet das Quadrat des 2ten Theils der Wurzel M. In der ersten Zifer der dritten Classe stehet das doppelte Product aus den beyden ersten Theilen in den 3ten und in der letzten Zifer eben dieser Classe das Quadrat des dritten Theils der Wurzel. Die erste Zifer der 4ten Classe enthält das doppelte Product aus den 3 ersten Theilen in den 4ten und die 2te Zifer eben dieser Classe das Quadrat vom 4ten Theil der nemlichen Wurzel. In der ersten Zifer der 5ten Classe nimmt das doppelte Product aus den 4 ersten Theilen in den 5ten und eben daselbst in der 2ten Zifer des Quadrats des 5ten Theils seinen Anfang. Im Anfange der 6ten Classe hat man hauptsächlich das doppelte Product aus den 5 ersten Theilen in den 6ten, am Ende aber das Quadrat des 6ten Theils der Wurzel zu suchen. Und überhaupt in der ersten Zifer der nten Classe fängt an das doppelte Product aus den n — 1 vorhergehenden Theilen in

den

den nten und in der letzten Zifer das Quadrat des nten Theils der Wurzel.

## §. 22.

Aus einer Zahl E die Quadratwurzel zu ziehen, verfahre man nach den im vorhergehenden gegebenen Gründen also:

1) Theile man die Zahl E von der Rechten zur Linken in Classen ein, und gebe jeder Classe zwo Zifern, die höchste Classe kann auch nur eine Zifer haben. Den graden Exponenten der Ord. über der niedrigsten Zifer der höchsten Classe dividire mit zwey; so kommt der höchste Exponent der Ord. von dem ersten Theil der Wurzel heraus. Nun suche man eine Zifer auf, deren Quadrat so groß oder nur etwas kleiner ist als die Zifern in eben der höchsten Classe. Ziehe solches von der höchsten Classe ab, den Rest nehme man zu der ersten Zifer der nächstfolgenden Classe: hier suche man

2) den 2ten Theil der Wurzel auf folgende Art. Weil in der ersten Zifer der 2ten Classe und dem Reste aus der ersten ein Product enthalten ist, das aus drey Factoren bestehet, nämlich aus zwey, aus dem ersten und aus dem noch unbekannten 2ten Theil der Wurzel, so dividire mit dem Product aus den beyden ersten Factoren, d. i. mit dem Producte aus zwey und dem ersten

ersten Theil der Wurzel in eben diesen Rest aus der ersten Classe und der 1ten Zifer der 2ten; alsdenn giebt sich der dritte Factor, oder der 2te Theil der Wurzel. Denn überhaupt jedes Product aus 3 Factoren ist so beschaffen, daß wenn es mit zwey von denselben dividiret wird; der dritte allemal herauskommt. Wie man an jedem Beyspiele sehen kann, wenn man nicht schon aus dem Begrif vom Product aus 3 Factoren davon überzeugt ist. Bey dem Product aus den beyden Factoren ist noch zu erinnern, daß solches mit seiner niedrigsten Zifer grade unter die erste Zifer der nächsten Classe gesetzet und mit Klammern eingeschlossen wird. Ist auf solche Art, durch die Division der 2te oder neue Theil der Wurzel richtig gefunden; ich sage richtig, denn man muß sich beym dividiren in acht nehmen, denselben weder zu groß noch zu klein anzunehmen; alsdenn wird eben das schon zu vorhin geschriebene Product, als welches der Divisor gewesen, mit diesem gefundenen neuen Theil der Wurzel multipliciret, um das doppelte Product aus dem ersten in den 2ten Theil zu bekommen, welches letztere Product ebenfalls mit seiner niedrigsten Zifer unter die erste der folgenden Classe gesetzet und von dieser und von dem Rest aus der vorhergehenden Classe abgezogen

gezogen werden muß. Was hier bleibt wird zur letzten Zifer eben dieser Classe genommen, und davon das Quadrat des neuen Theils abgezogen. Den gebliebenen Rest nimmt man weiter zu der ersten Zifer der dritten Classe und suchet

3) den dritten Theil der Wurzel fast eben so wie vorher. Nämlich man nimmt die beyden ersten Theile der Wurzel zweymal, und setzet dieses Product mit seiner niedrigsten Zifer unter die erste der folgenden Classe, schliesset solches wieder in Klammern ein, und dividiret ebenfalls wie vorher. Bey welcher Division eben das zu beobachten stehet, was kurz vorher bemerket worden; alsdenn findet sich der dritte Theil der Wurzel. Denn in der ersten Zifer der dritten Classe und dem Reste aus der zweyten ist abermals ein Product aus 3 Factoren enthalten; nämlich aus zwey, aus den beyden ersten Theilen, welche letztere für einen Factor angesehen werden, und aus dem noch nicht bekannten 3ten Theil der Wurzel. Also wird man auch leicht die Ursache einsehen, warum mit dem Product aus zwey und den beyden ersten Theilen als einen Factor betrachtet dividiret werden muß, um den dritten zu erhalten. Ist der dritte Theil gefunden; so wird voriges

Product, womit die Division geschehen ist, mit eben dem gefundenen Quotienten oder neuen Theil der Wurzel multipliciret, das daher entstehende Product mit seiner niedrigsten Zifer unter die ersten der dritten Classe gesetzet, und denn von dieser ersten Zifer und dem Ueberschuß aus der vorigen Classe abgezogen. Das hier übrig gebliebene wird zur zweyten Zifer der dritten Classe genommen, und von eben dieser genannten Zifer und dem dazu genommenen Reste das Quadrat des 3ten Theils abgezogen, alsdenn ist man mit den 3 ersten Theilen der Wurzel so weit zu Ende. Den vierten Theil der Wurzel zu finden, wird der eben entstandene Rest aus der dritten Classe zu der ersten Zifer der 4ten genommen und denn

4) die 3 gefundenen Theile der Wurzel verdoppelt, das Product ebenfalls wieder mit seiner niedrigsten Zifer unter die erste der 4ten Classe gesetzet, in Klammern eingefaßt, und dividiret, wie vorher gelehret worden, giebt den vierten oder neuen Theil der Wurzel. Wegen der Division ist zu merken, daß die 3 ersten Theile von der Wurzel für einen Factor und zwey für den anderen von dem Producte angesehen werden, das in dem Rest aus der dritten Classe und der ersten Zifer der folgenden enthal-

enthalten ist; und aus den drey Factoren, den beyden ebengenannten nebst dem 4ten Theile der Wurzel bestehet. Im übrigen verfähret man hier nicht anders als bey den vorhergehenden Theilen. Nämlich den gefundenen 4ten Theil multipliciret man mit dem Producte womit man dividiret hat; das neue Product aber wird von dem Rest und der ersten Zifer der 4ten Classe zusammengenommen abgezogen. Von dem Ueberschuß und der 2ten Zifer der nämlichen Classe noch das Quadrat des 4ten Theils der Wurzel weggenommen, so ist man auch mit den vier ersten Theilen der Wurzel fertig.

5) Bey der 5ten Classe ist eben das zu beobachten, was bey den 4 ersten in acht genommen werden mußte, wenn man den 5ten oder neuen Theil der Wurzel haben will. Und überhaupt bey jedem Anfange einer neuen Classe; wird der Rest aus der vorhergehenden zu der ersten Zifer der zunächststehenden Classe genommen. Wovon hernach das doppelte Product aus den schon bekannten Theilen der Wurzel in den noch zu suchenden abgezogen werden muß. Bey Formirung dieses Products werden die schon bekannten Theile der Wurzel für einen, zwey für den anderen und der noch zusuchende Theil für den 3ten Factor gehalten.

Am Ende aber eben dieser Classe ziehet man noch das Quadrat des gesuchten neuen Theils der Wurzel ab. Und so gehet man immer von einer Classe zur andern über, bis endlich die Wurzel mit allen ihren Theilen völlig gefunden worden ist. Bleibt am Ende der letzten Classe kein Rest mehr übrig, so ist die Zahl E ein wirkliches Quadrat gewesen. Ist man aber alle Classen durchgegangen, und am Ende der letzten bleibt noch einiger Rest übrig; so war die Zahl kein eigentliches Quadrat, und die Wurzel läßt sich nicht in einer Menge bestimmter Zifern ausdrücken; sondern man muß sich in diesem Fall damit begnügen, daß man die Wurzel in Decimalzifern durch Näherung und zwar so weit suchet, bis endlich das, was noch an der Vollständigkeit der Wurzel fehlet: gegen das, was davon schon gesuchet worden, für nichts zu achten ist. Folgende Ausziehung der Quadrat-Wurzel aus der Zahl E ist vollkommen nach den in 1, 2, 3, 4, 5, gegebenen Vorschriften gemacht worden.

| | | |
|---|---|---|
| | 11 10 98 76 54 32 10 | 543210 |
| $E =$ | 99, 74, 71, 60, 02, 25 | 998735 |
| $a^2 = p^2 =$ | 81 | $p + q$ |
| | 187 | $+ r + s$ |
| $2a = 2p =$ | (18) | $+ t + u$ |
| $2ab = 2pq =$ | 162 | |
| | 254 | |
| $b^2 = q^2 =$ | 81 | |
| | 1737 | |
| $2a = 2(p+q) =$ | (198) | |
| $2ab = 2(p+q)r =$ | 1584 | |
| | 1531 | |
| $b^2 = r^2 =$ | 64 | |
| | 14676 | |
| $2a = 2(p+q+r) =$ | (1996) | |
| $2ab = 2(p+q+r)s =$ | 13972 | |
| | 7040 | |
| $b^2 = s^2 =$ | 49 | |
| | 69910 | |
| $2a = 2(p+q+r+s) =$ | (19974) | |
| $2ab = 2(p+q+r+s)t =$ | 59922 | |
| | 99882 | |
| $b^2 = t^2 =$ | 9 | |
| | 998732 | |
| $2a = 2(p+q+r+ +t) =$ | (199746) | |
| $2ab = 2(p+q+r+s+t)u =$ | 998730 | |
| | 25 | |
| $b^2 = u^2 =$ | 25 | |

## §. 23.

Nimmt man das, was § 21 und dessen 10ten Zusatze von der Zusammensetzung des Quadrats von M gesagt worden, wohl in Acht; so wird es nicht schwer fallen, von einer Zahl N, deren Ziffern positiven und negativen Exponent. der Ordnung haben, das Quadrat zu machen. Es sey $N = \overset{1}{6}\,\overset{0}{7}\,\overset{-1}{5}\,\overset{-2}{8}$; so stehet das Quadrat davon wie folget:

$$N = \overset{1}{6}\,\overset{0}{7}\,\overset{-1}{5}\,\overset{-2}{8} = \overset{1}{6} + \overset{0}{7} + \overset{-1}{5} + \overset{-2}{8} = p + q + r + s$$

| | 2 1 | 0 -1 | -2 -3 | -4 | |
|---|---|---|---|---|---|
| $\overset{1}{6}.\overset{1}{6} =$ | 36 | | | | $= a^2 = p^2$ |
| $2.\overset{1}{6}.\overset{0}{7} =$ | 8 | 4 | | | $= 2ab = 2pq$ |
| $\overset{0}{7}.\overset{0}{7} =$ | | 49 | | | $= b^2 = q^2$ |
| A | | | | | |
| $2.\overset{0}{67}.\overset{-1}{5} =$ | | 67 | 0 | | $= 2ab = 2(p+q)r$ |
| $\overset{-1}{5}.\overset{-1}{5} =$ | | | 25 | | $= b^2 = r^2$ |
| B $2.\overset{-1}{675}.\overset{-2}{8} =$ | | 10 | 80 | 0 | $= 2ab = 2(p+q+r)s$ |
| $\overset{-2}{8}.\overset{-2}{8} =$ | | | | 64 | $= b^2 = s^2$ |
| C $=$ | 45 | 67 | 05 | 64 | $= N^2 = (\overset{1}{6}\,\overset{0}{7}\,\overset{-1}{5}\,\overset{-2}{8})^2$ |

Zus.

Zus. Aus dieser Zahl C wird die Quadrat-Wurzel eben so gesunden, wie § 22. Nur muß man die negativen Exponenten der Ordn. in der Wurzel bemerken, welches nicht schwer seyn wird, da man weiß, was in jeder Classe enthalten ist. Es kommt nämlich in der ersten Classe von der Linken zur Rechten das Quadrat des ersten Theils der Wurzel vor, welcher erste Theil einen positiven Exponenten hat. In der ersten Zifer der 2ten Classe ist das doppelte Product aus dem ersten Theil in den 2ten enthalten, in der letzten Zifer eben dieser Classe das Quadrat des 2ten Theils der Wurzel, welcher 2te Theil die schlechte Einer in der Wurzel N enthält. In der ersten Zifer der dritten Classe macht seinen Anfang das doppelte Product aus den beyden ersten Theilen in den dritten Theil der Wurzel; Oder welches einerley, das doppelte Product aus den Zehner, und den schlechten Einer in die Zehntheilchen von der Einheit. Am Ende dieser nämlichen Classe kommt vor das Quadrat des dritten Theils, d. i. das Quadrat von der Zifer der Zahl N, die Zehntheilchen von der schlechten Einheit bedeutet. Endlich in dem Anfange der vierten Classe stehet das doppelte Product aus den 3 ersten Theilen, d. i. aus den Zehner, aus den Einer, und aus den Zehntheilchen der Wurzel in den 4ten oder in die Hundertheilchen der schlechten Einheit. Das Ende beschliesset das Quadrat des 4ten Theils d. i.

das Quadrat von den Hunderttheilchen der Zahl N. Folglich

$$C = \overset{3\;2}{45},\ \overset{1\;0}{67},\ \overset{-1\;-2}{05},\ \overset{-3\;-4}{64} \quad \Big| \quad \overset{1\;0\;-1\;-2}{6758} = p+q+r+s$$

$$a^2 = p^2 = 36$$

$$\quad\quad 96$$

$$2a = 2p = (12)$$

$$2ab = 2pq = 84$$

$$\quad\quad 127$$

$$b^2 = q = 49$$

$$\quad\quad 780$$

$$2a = 2(p+q) = (134)$$

$$2ab = 2(p+q)r = 670$$

$$\quad\quad 1105$$

$$b^2 = r^2 = 25$$

$$\quad\quad 10806$$

$$2a = 2(p+q+r) = (1350)$$

$$2ab = 2(p+q+r)s = 10800$$

$$\quad\quad \cdot\cdot\cdot\cdot 64$$

$$b^2 = s^2 = 64$$

$$\quad\quad \cdot\;\cdot$$

## §. 24.

Von einer Zahl $O = 0,\ \overset{-1}{7}\ \overset{-2}{4}\ \overset{-3}{6}$, die lauter Decimalzifern hat, oder deren Zifern alle negativen Exponenten der Ord. haben, wird nach § 21 und dessen 10ten Zusatze auf folgende Weise

Weise das Quadrat formiret, vorausgesetzet, daß man sich den 11ten § wohl bekannt gemacht hat:

$$O = \overset{-1}{7}\;\overset{-2}{4}\;\overset{3}{6} = \overset{-1}{7} + \overset{-2}{4} + \overset{-3}{6} = p + q + r$$

| | -2 | -3 -4 | -5 -6 | |
|---|---|---|---|---|
| $(\overset{-1}{7})^2 = \overset{-1}{7}\cdot\overset{-1}{7} =$ | 49 | | | $= a^2 = p^2$ |
| $2\cdot\overset{-1}{7}\cdot\overset{-2}{4} =$ | 5 | 6 | | $2ab = 2pq$ |
| $(\overset{-2}{4})^2 = \overset{-2}{4}\cdot\overset{-2}{4} =$ | | 16 | | $= b^2 = q^2$ |
| A | | | | |
| $2\cdot\overset{-2}{74}\cdot\overset{3}{6} =$ | | 88 | 8 | $= 2ab = 2(p+q)r$ |
| $(\overset{-3}{6})^2 = \overset{-3}{6}\cdot\overset{3}{6} =$ | | | 36 | $= b^2 = r^2$ |
| B = | 55 | 65 | 16 | $= (\overset{-1\,-2\,-3}{746})^2$ |

$$= \overset{-3}{746}\cdot\overset{-3}{746}\ (\S.\ 11).$$

Ungetheilt

$$O = \overset{-3}{746}$$

$$\overset{-3}{746}$$

4476
2984
5222

$$O^2 = \overset{-6}{556516} = B.$$

1 Zus. Es ist offenbar daß die besonderen Zifern der Zahl O nichts in der Ordnung der Theilen des Quadrats von O ändern. Es mag O vor Zifern haben, welche man will; so wird die Lage der Theilen des Quadrats davon immer die nämliche Gestalt behalten, die sie jetzo bey der bestimmten Zahl $O = 7^{-1}\ 4^{-2}\ 6^{-3}$ hat.

2 Zus. Auch hier in dem Quadrat B kommen wie in § 21 und 23 die Quadrate von allen einzelnen Zifern der Zahl O und die doppelten Producte aus jeder einzeln Zifer in allen ihr zur Linken stehenden Zifern vor; aber so daß die Quadrate in den graden und die doppelten Producte in den ungraden negativen Ordnungen anfangen. Wäre also eine Zifer der Zahl O von der Ordnung — n; so würde die niedrigste Zifer des Quadrats dieser Zifer von O, — 2 n zum Exponenten haben. Man nehme für die genannte Zifer der Zahl O, $6^{-3}$ an, wo $-3 = -n$ ist; alsdenn ist das Quadrat von $6^{-3}$ gleich $36^{-2.3}$ $= 36^{-2n}$.

3 Zus. Die Ausziehung der Quadratwurzel aus B wird nach eben den Regeln verrichtet, die § 22 und 23 gelehret worden sind.

$$B = \overset{1}{5}\,\overset{2}{5},\overset{3}{6}\,\overset{4}{5},\overset{5}{1}\,\overset{6}{6} \quad\Big|\quad \overset{1}{7}\ \overset{2}{4}\ \overset{3}{6} = p + q + r$$

$a^2 = p^2 = 49$

66

$2a = 2p = (14)$

$2ab = 2pq = 56$

105

$b^2 = q^2 = 16$

891

$2a = 2(p+q) = (148)$

$2ab = 2(p+q)r = 888$

..36

$r^2 = 36$

..

## §. 25.

Die Beyspiele in § 23 u. 24 lehren gar deutlich, wie man sich in den Fällen zu verhalten habe, wenn aus einer Zahl P die Quadratwurzel gezogen werden soll, die entweder aus ganzen und Decimalzifern zusammen oder blos aus Decimalzifern bestehet, oder an welche statt der Decimalzifern Nullen gehänget werden müssen. Finden der erste und 2te Fall statt; so sehe man zu ob der negative Exponent der Ord. über der niedrigsten Zifer der Zahl P grade oder ungrade sey. Ist er grade, so theile man die Zifern der Zahl P wie gewöhnlich von der Rechten zur Linken

ken in Classen, und gebe jeder Classe zwo Zifern 2c. Ist er aber ungrade, alsdenn hänge an die niedrigste Zifer noch eine Null, schreibe den nächstfolgenden graden Exponenten drüber, und verrichte das übrige, wie sonsten. Hat aber P pur ganze Zifern, und man hat das Quadrat des letzten Theils der Wurzel in der 2ten Zifer der letzten Classe von P richtig abgezogen, so muß man an den Rest, wenn einer übrig bleibt, und man die Wurzel noch genauer haben will, eben so viel paar Nullen anhängen, auf so viel Decimalstellen die Wurzel weiter gesuchet werden soll.

1 Zus. Es sey $P = \overset{1}{4}\,\overset{0}{6}, \overset{-1}{3}\ \overset{-2}{4}\ \overset{-3}{5}$, wo der Exponent über der niedrigsten Zifer 5 gleich —3 also ungrade ist. Man muß folglich bey Ausziehung der Quadratwurzel, zur Rechten der $\overset{-3}{5}$ noch eine Null anhängen und oben drüber — 4 als Exponent der Ord. schreiben. Durch die angehängte Null wird P im geringsten nicht vergrössert, indem die übrigen Zifern ihre Exponenten wie zuvor behalten. Die Ursache davon ist, weil alle Quadrate der einzeln Theile der Wurzel von P in den graden Ordnungen anfangen. Würde man die Zifern der Zahl $P = \overset{1\,0}{46}, \overset{-1}{3}\ \overset{-2}{4}\ \overset{-3}{5}$ von der Rechten zur Linken in Clas-

sen

sen theilen und jeder Classe zwo Zifern geben; so käme in die 2te Zifer der letzten Classe $\overset{-3}{5}$ also eine Zifer von einer ungraden Ordnung zu stehen, von welcher und dem Reste aus der vorhergehenden das Quadrat des letzten Theils der Wurzel abgezogen werden soll, welches der Zusammensetzung in § 23 nnd 24 wiederspricht. Ist hingegen noch eine Nulle angehänget; so stimmt es vollkommen damit überein. Eben so ist es auch mit der Zahl P beschaffen, wenn sie aus lauter Decimalzifern bestehet.

2 Zus. Soll aus P = 7 die Quadratwurzel gesucht werden; so fällt in die Augen, daß sie keine ganze Zahl ist; sondern das noch Decimalzifern dazu gehören. Will man also die Wurzel noch in etlichen Decimalstellen etwas genauer ausdrücken; so ist nur nöthig, an P = 7 so viel paar Nullen zu hängen: so viel Decimalzifern von der Wurzel gesucht werden sollen. Denn es ist P auch gleich $\overset{0}{7}, \overset{-1}{0}\ \overset{-2}{0}\ \overset{-3}{0}\ \overset{-4}{0}\ \overset{-5}{0}\ \overset{-6}{0}\ \overset{-7}{0}\ \overset{-8}{0}$ 2c. Woraus die Wurzel eben so wie § 23 Zus. gesuchet wird.

```
         0  ⁻1 ⁻2 ·3 ·4 ·5 ⁻6 ··7 ··8 ··9 ··10 | 0·1·2·3·4·5
  P  =  7, 0  0  0  0  0  0  0   0   0   0    | 2 6 4 5 7 5
 p²  =  4                                     | p+q +r
        ―――                                    | +s+t+u
        30
 2p  =   (4)
2pq  =  2 4
―――――――――――――
      , 60
 q²  =    36
―――――――――――――――
         240
2(p+q) = (52)
2(p+q) r = 208
―――――――――――――――――
          320
r²  =       16
―――――――――――――――――
          3040
2(p+q+r) = (528)
2(p+q+r)s = 2640
――――――――――――――――――――
           ·4000
s²  =         25
――――――――――――――――――――
           39750
2(p+q+r+s) = (5290)
2(p+q+r+s)t = 37030
――――――――――――――――――――――
           : 27200
   t²  =       49
――――――――――――――――――――――――
            271510
2(p+q+r+s+t) = (52914)
2(p+q+r+s+t)u = 264570
――――――――――――――――――――――――――
             ·169400
      u²  =       25
           ――――――――――――――――
              69375 = R.
```

Die

Die Probe nach §. 11.

```
                          —5
          2 6 4 5 7 5
                          —5
          2 6 4 5 7 5
        ———————————————
        1 3 2 2 8 7 5
      1 8 5 2 0 2 5
    1 3 2 2 8 7 5
  1 0 5 8 3 0 0
1 5 8 7 4 5 0
5 2 9 1 5 0
———————————————————————
0—1—2—3—4—5—6—7—8—9—10
6 9 9 9 9 9 3 0 6 2 5
                    —10
            6 9 3 7 5 = R
———————————————————————
0
7, 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 =
```

Anmerk. Wer alles bisherige gehörig durchgegangen hat, dem wird es nicht schwer fallen aus allen Zahlen die Quadratwurzel zu suchen. Er wird auch wie ich hoffe, dadurch in den Stand gesetzt worden seyn, den ganzen Beweiß von dem Quadrate einer Zahl in des Herrn Hofrath Kästners Anfangsgründen der Arithmetik und Geometrie zu fassen.

## Von der Cubikwurzel.

§. 26.

Den ganzen Beweiß von der Cubikwurzel recht einzusehen, ist nöthig, daß man wisse, wie ein Cubus aus seiner Wurzel entstehet. Aus einer Zahl mit einer Zifer ist der Cubus leicht zu machen, und man hat keine andere Regeln dabey zu beobachten, als daß man die Zahl 3 mal mit sich selbst multipliciret (§ 2). Will man aber den Cubus von einer Zahl machen, die mit etlichen Zifern geschrieben ist, so könnte man ihn eben so machen, als wenn sie nur eine Zifer hätte, nämlich man könnte die Zahl 3 mal mit sich selbst multipliciren, woferne man nicht auf die besondere Lage der Theile des Cubus sehen wollte. Da wir aber durch die Kenntniß und Lage der Theilen, woraus der Cubus einer Zahl mit etlichen Zifern bestehet, nicht nur erst recht mit der Natur des Cubus bekannt, sondern auch auf leichte Wege geführet werden, den Würfel oder Cubus auf eben die Weise in seine ersten Grundzahlen oder Wurzeln zu zerlegen, als er aus dieser seiner Wurzel entstanden ist; so war man noch auf andere Arten bedacht, den Cubus einer Zahl mit mehrern Zifern zusammen zu setzen. Was vor eine Methode einen Cubus zu verfertigen, hier gewählet worden, läßt sich aus dem ersten Theile dieser Schrift leicht begreifen.

## §. 27.

Den Anfang wollen wir mit einer Zahl machen, die nur mit zwo und zwar mit den zwo größten Zifern geschrieben ist, damit das, was sich dabey erinnern läßt, hernach auf eine jede mit zwo Zifern geschriebene Zahl angewendet werden kann. Die größte mit zwo Zifern geschriebene Zahl ist 99 = $\overset{10}{99}$ (§ 5). Diese läßset sich auch so ausdrücken $\overset{1}{9} + \overset{0}{9}$. Soll nun der Cubus von 99 = $\overset{10}{99}$ = $\overset{1}{9} + \overset{0}{9}$ gemacht werden; so wird dieser Cubus aus 4 Haupttheilen bestehen. Nämlich 1) aus dem Cubus von $\overset{1}{9}$ als dem ersten Theil der Wurzel. 2) Aus dem dreyfachen Producte aus dem Quadrate des ersten Theils, d. i. der $\overset{1}{9}$ in den 2ten oder in die $\overset{0}{9}$; 3) Aus den dreyfachen Producte aus dem ersten Theile oder der $\overset{1}{9}$ in das Quadrat des 2ten oder der $\overset{0}{9}$: Und 4) Aus dem Würfel oder Cubus des 2ten Theils oder der $\overset{0}{9}$. Um sich davon gewiß zu überzeugen; darf man nur den Würfel von 99 und von $\overset{1}{9} + \overset{0}{9}$ d. i. den Würfel von der ungetheilten und getheilten Zahl 99 machen; so wird alles vollkommen mit einander übereinstimmen.

1) Ungetheilt

$$\begin{array}{r} 99 \\ \underline{99} \\ 891 \\ \underline{891\phantom{0}} \\ 9801 \\ \underline{99} \\ 88209 \\ \underline{88209\phantom{0}} \\ 970299 = 99^3 \end{array}$$

2) Getheilt

Bey dieser Art Zahlen mit einander zu multipliciren muß man sich wohl erinnern, was § 9 davon gesagt worden.

$$\begin{array}{r} \overset{1}{9} + \overset{0}{9} \\ \underline{9 + \overset{0}{9}} \\ \overset{2}{81} + \overset{1}{81} \\ \underline{+ \overset{1}{81} + \overset{0}{81}} \\ \overset{2}{81} + \overset{1}{162} + \overset{0}{81} \\ \underline{\overset{1}{9} + \overset{0}{9}} \\ \overset{3}{729} + \overset{2}{1458} + \overset{1}{729} \\ \underline{\overset{2}{729} + \overset{1}{1458} + \overset{0}{729}} \\ \overset{3}{729} + \overset{2}{2187} + \overset{2}{2187} + \overset{0}{725} = (\overset{1}{9} + \overset{0}{9})^3 \end{array}$$

oder

oder gleich $(\overset{1}{9})^3 + 3\,(\overset{1}{9})^2.\ \overset{0}{9} + 3.\,\overset{1}{9}\,(\overset{0}{9})^2 +$ $(\overset{0}{9})^3$ nach (§ 3). Diese Theile nach den Exponenten der Ordnung über ihren niedrigsten Ziffern unter einander gesetzet und addiret, werden eben das Product mit in (1) geben. Also

$$
\begin{array}{lrrrrrr}
 & \scriptstyle 3 & \scriptstyle 2 & \scriptstyle 1 & \scriptstyle 0 & & \\
(\overset{1}{9})^3 = & 7 & 2 & 9 & & & \\
3.\,(\overset{1}{9})^2.\,\overset{0}{9} = & & 2 & 1 & 8 & 7 & \\
3.\overset{1}{9}.\,(\overset{0}{9})^2 = & & & 2 & 1 & 8 & 7 \\
(\overset{0}{9})^3 = & & & & 7 & 2 & 9 \\
\hline
(\overset{1}{9}+\overset{0}{9})^3 = & 9 & 7 & 0 & 2 & 9 & 9
\end{array}
$$

Es wäre also die weitläuftige Multiplication in (2) nicht nothwendig gewesen, um die Theile des Würfels von $99 = \overset{1}{9} + \overset{0}{9}$ zu bekommen, wenn man nur blos dem gefolget hätte, was §. 27 gesagt worden. Indessen konnte es doch nicht schaden, auch von diesem Verfahren einen Begrif zu geben.

## §. 28.

Nachdem was § 27 angeführet worden, kann man den Würfel von $\overset{10}{99} = \overset{1}{9} + \overset{0}{9}$ nach und nach auf eine sehr leichte Art machen, wenn § 9 dabey zu Hülfe genommen wird. Man macht

1) den Würfel von $\overset{1}{9}$; 2) das dreyfache Product aus $(\overset{1}{9})^2$ in $\overset{0}{9}$; 3) das dreyfache Product aus $\overset{1}{9}$ in $(\overset{0}{9})^2$; und endlich 4) den Würfel von $\overset{0}{9}$. Diese vier Theile des Würfels von $\overset{10}{99} = \overset{1}{9} + \overset{0}{9}$ werden nach den Exponenten der Ord. auf ihren niedrigsten Zifern untereinander gesetzet und addiret. Die Summe giebt den wahren Würfel von $\overset{10}{99}$. So ist

| | | | |
|---|---|---|---|
| | | 3 | 2 1 0 |
| $(\overset{1}{9})^3$ | = | 7 2 9 | |
| $3 \cdot (\overset{1}{9})^2 \cdot \overset{1}{9}$ | = | 2 1 8 | 7 |
| $3 \cdot 9 \cdot (\overset{0}{9})^2$ | = | 2 1 | 8 7 |
| $(\overset{0}{9})^3$ | = | | 7 2 9 |
| | | 9 7 0 | 2 9 9 |

Theilet man die Zifern dieses Würfels der Zahl $\overset{10}{99}$ von der Rechten zur Linken in Classen, und giebt jeder Classe 3 Zifern, so leuchtet aus der Zusammensetzung dieses Würfels augenscheinlich hervor, daß in der niedrigsten Zifer der höchsten Classe zur Linken, der Würfel des ersten Theils; in der ersten Zifer der nächstfolgenden zweyten Classe das dreyfache Product aus dem Quadrate

des

des ersten Theils in den 2ten: In der 2ten Zifer der nämlichen Classe das dreyfache Product aus dem ersten in das Quadrat des zweyten Theils; in der letzten Zifer genannter Classe der Würfel des letzten Theils der Wurzel vorkommt.

1 Zus. Der Würfel der größten Zahl mit zwo Zifern hat nach § 28 nur 6 Zifern. Die kleinste Zahl mit zwo Zifern ist 10. Der Würfel davon ist 1000. Folglich kann der Würfel jeder anderer Zahl mit zwo Zifern nicht über 6 und unter 4 Zifern haben. Eben so läßt sich finden, daß der Würfel von 999 als der grösten Zahl mit 3 Zifern höchstens nur 9 und der Würfel von 100 oder von der kleinsten Zahl mit 3 Zifern, wenigstens 7 Zifern haben muß. Wird also eine Zahl mit 9, 8 oder 7 Zifern gegeben, und es soll die Cubikwurzel daraus gesuchet werden; so kann offenbar die Wurzel nur 3 Zifern haben, wenn anders die Wurzel eine ganze Zahl seyn soll. Ist aber eine Zahl gegeben, die nur 6, 5 oder 4 Zifern hat; so kann die Wurzel als eine ganze Zahl nicht mehr oder weniger als zwo Zifern haben.

2 Zus. Bey der Zusammensetzung des Würfels von $\overset{10}{99}$ in § 28 leuchtet in die Augen, daß da wo der Würfel von $\overset{1}{9}$ oder von dem ersten Theil der Wurzel liegt, auch noch Zifern von

den beyden dreyfachen Producten ihre Stelle haben; die bey der Addition aller Theile des Würfels von $\overset{1}{9}\overset{0}{9}$ mit zu den Zifern des Würfels von $\overset{1}{9}$ gerechnet werden. Dieser Umstand könnte zweifelhaft machen, ob bey Ausziehung der Cubikwurzel in der höchsten Classe zur Linken nicht der Würfel einer grössern Zahl als der Würfel von $\overset{1}{9}$ enthalten sey. Allein der Zweifel wird bald verschwinden; wenn man nur bedenkt, daß eine $\overset{1}{1}$ d. i. eine Eins von der ersten Ord. grösser ist als $\overset{0}{9}$; oder als neun schlechte Einheiten. Denn ein Zehner ist grösser als neun schlechte Einer. Folglich $\overset{1}{9} + \overset{1}{1}$ ist grösser als $\overset{1}{9} + \overset{0}{9}$. Also ist auch der Würfel von $\overset{1}{9} + \overset{1}{1}$ grösser als der Würfel von $\overset{1}{9} + \overset{0}{9}$. Es kann folglich auch in der höchsten Classe § 28 kein Würfel einer grösseren Zahl als der von $\overset{1}{9}$ enthalten seyn. Weil wenn man den Würfel einer Zahl, die nur um $\overset{1}{1}$ grösser wäre als $\overset{1}{9}$, das ist den Würfel von $\overset{1}{9}$ $+ \overset{1}{1}$, daselbst abziehen wollte; so wäre ja eben dieser Würfel nicht nur grösser als alle Zifern in derselben Classe sondern er wäre grösser, als alle Zifern in der ersten und 2ten Classe, welches nicht seyn soll und kann.

§. 29.

Soll aus einer Zahl mit 4, 5 oder 6 Zifern die Cubikwurzel gesucht werden; so wird solches nach § 28 leicht zu bewerkstelligen seyn. Man theilt die Zahl von der Rechten zur Linken in Classen, giebt jeder Classe drey Zifern. Die höchste Classe zur Linken kann auch nur eine, oder zwo Zifern haben. Nun wird

1) eine Zahl gesuchet, wovon der Würfel so groß oder doch nur etwas kleiner ist, als die Zifern in der höchsten Classe zur Linken. Dieser gesuchten Zahl Würfel ziehet man in eben genannter Classe ab; so ist der erste Theil der Wurzel gefunden. Den Rest zählet man zu der ersten Zifer in der nächstfolgenden Classe, und suchet

2) Durch Hülfe der Division den 2ten Theil der Wurzel nach § 28 also: Weil in der ersten Zifer der folgenden Classe und dem Reste aus der kurz vorhergehenden das dreyfache Product aus dem Quadrate des ersten eben gefundenen, in den noch zu suchenden zweyten Theil der Wurzel enthalten ist: so macht man das Quadrat vom ersten Theil, nimmt solches 3 mal; setzt was heraus kommt, mit seiner niedrigsten Zifer unter die erste Zifer der folgenden Classe, schliesset es in Klammern, und dividiret damit in eben diese Zifer und den dazu ge-

nommenen Rest aus der ersten Classe; so gibt sich der 2te oder neue Theil der Wurzel. Bey dieser Division ist wohl zu merken, daß man den Quotienten nicht zu klein; sondern so groß nimmt, daß das übrige, was noch abzuziehen ist, füglich weggenommen werden kann, ohne daß jedoch ein unnöthiger Rest bleibt. Es ist auch weiter aus § 28 klar, warum dividiret wird. Denn das dreyfache Product aus dem Quadrate des ersten Theils in den 2ten, ist als ein Product anzusehen, das aus 3 Factoren entstanden: nämlich aus 3, welches der erste Factor, aus dem Quadrate des ersten Theils, welches der andere, und aus dem einfachen noch zusuchenden 2ten Theil, welches der dritte Factor ist. Die beyden ersten Factoren von diesem Producte sind bekannt Wird also mit diesen zween bekannten Factoren dividiret; so muß nothwendig der dritte Factor, das ist der 2te oder neue Theil der Wurzel heraus kommen. Ist auf solche Art der 2te Theil gefunden, alsdenn wird dieser gefundene Theil mit dem Divisor, das ist mit dem Producte aus den zween bekannten Factoren multipliciret, und was dadurch herausgebracht wird, mit seiner niedrigsten Zifer grade unter die erste der nächsten Classe zur Rechten gesetzet, und von dieser nebst

den Ueberschusse aus der vorigen Classe abgezogen; so hat ma den 2ten Theil der Wurzel richtig gefunden. Den hier entstandenen Rest nimmt man

3) zu der 2ten Zifer eben dieser Classe, worauf das Quadrat vom 2ten Theil gemacht, solches mit dem einfachen ersten Theil und mit 3 multipliciret, das dreyfache Product aus dem ersten in das Quadrat des 2ten Theils gibt, welches nach (§ 8) mit seiner niedrigsten Zifer, in der 2ten Zifer der folgenden Classe anfängt. Folglich auch daselbst abgezogen werden muß. Was hier wieder bleibt, wird zu der letzten Zifer dieser Classe genommen, und davon der Würfel des 2ten Theils der Wurzel weggenommen. Bleibt nach geschehener Subtraction nichts übrig; so war diese Zahl, woraus die Cubikwurzel gezogen werden sollte, wirklich ein Cubus oder Würfel. Ist aber noch ein Rest vorhanden, und man hat auch den 2ten Theil der Wurzel nicht zu klein angenommen; so ist es ein sicheres Kennzeichen, daß diese Zahl kein eigentlicher Cubus gewesen, und daß man folglich die Cubikwurzel daraus niemals in einer bestimmten Zahl ausdrücken könne; sondern sich nur mit einer Näherung behelfen müsse.

Zus. Folgendes Exempel aus § 28 ist vollkommen nach den in § 29 gegebenen Regeln gemacht worden.

$$\overset{3\;\;2\;\;1\;\;0}{970,299}\;\Big|\;\overset{1\;0}{99}$$

$$\left(\overset{1}{9}\right)^3 \quad = \quad 729$$

$$\overline{\qquad\qquad 2412}$$

$$3\cdot\left(\overset{1}{9}\right)^2 \quad = \quad (243)$$

$$3\cdot\left(\overset{1}{9}\right)^2\cdot\overset{0}{9} \quad = \quad 2187$$

$$\overline{\qquad\qquad \cdot 2259}$$

$$3\cdot\overset{1}{9}\cdot\left(\overset{0}{9}\right)^2 \quad = \quad 2187$$

$$\overline{\qquad\qquad \cdot\cdot 729}$$

$$\left(\overset{0}{9}\right)^3 \quad = \quad 729$$

$$\overline{\qquad\qquad :\;:\;\cdot}$$

Alles was bey der Zusammensetzung dieses Exempels und bey der Ausziehung der Cubikwurzel aus demselben von § 27 bis hieher erinnert worden, gilt von jedem andern, wenn die Wurzel nur zwo Zifern hat. Es wurde in hiesigem Exempel mit Fleiß die größte Zahl mit zwo Zifern genommen, damit die Regeln, die hier beobachtet wurden, desto sicherer bey jeder anderer kleinerer Zahl angewendet werden können. Aus einer Zahl also die 6, 5 oder 4 Zifern hat, wird die

die Cubikwurzel eben so gefunden, wie hier gelehret worden ist. Wie nun der Cubus einer Zahl gemacht werden soll, die mit mehr als zwo Zifern geschrieben ist, das soll in dem folgenden umständlich gezeiget werden.

## §. 30.

Den Würfel einer Zahl M zu machen, die mit mehr als zwo Zifern geschrieben ist, kann man ein Verfahren gebrauchen, das dem in § 28 ähnlich ist. Nur mit dem Unterschiede, daß was dorten der erste Theil der Wurzel gewesen, hier in M bald die höchste Zifer allein, bald beyde die höchste und die nächstfolgende, bald drey die höchste und die zwo nächstfolgende Zifern für den ersten Theil und jede auf den ersten Theil folgende Zifer für den 2ten Theil angesehen werden können Da man also die Zifern der Zahl M so abtheilen kann, daß immer einige vorhergehende vor den ersten und die zunächst drauf folgende aber für den 2ten Theil bey der Zusammensetzung des Würfels gelten; so lässet sich jeder erste Theil von M mit dem Buchstaben a und jeder 2te mit dem Buchstaben b benennen. Macht man also den Würfel von a + b; so kann dieser Würfel zur allgemeinen Richtschnur dienen, und mit gutem Erfolge gebraucht werden. Der Würfel aber von a + b kommt heraus, wenn das Quadrat von a + b in § 20 aufs neue mit seiner Wurzel a + b multipliciret wird. Also

$$
\begin{array}{rcl}
(a + b)^2 & = & a + 2ab + b^2 \\
a + b & = & a + b \\
\hline
(a + b^3 & = & a^3 + 2a^2 b + ab^2 \\
 & & \quad + a^2 b + 2ab^2 + b^2 \\
\hline
 & = & a^3 + 3a^2 b + 3ab^2 + b^3
\end{array}
$$

Betrachtet man diesen Würfel von a + b; so stimmt alles vollkommen mit dem über ein, was § 27 von dem Würfel von $\overset{10}{99}$ gesagt worden. Nämlich jeder Würfel einer zweytheilichten Zahl hat vier Theile, welche sind: 1) der Würfel des ersten Theils; 2) das dreyfache Product aus dem Quadrate des ersten Theils in den 2ten; 3) das dreyfache Product aus dem ersten Theil in das Quadrat des 2ten; und 4) der Würfel des 2ten Theils.

## §. 31.

Es sey die Zahl M gleich $\overset{43210}{99756}$; so kann nach obiger allgemeinen Formul der Würfel davon auf folgende Weise zusammengesetzet werden.

Man macht erstlich den Cubus von $\overset{43}{99}$; wo $\overset{4}{9}$; a und $\overset{3}{9}$, b ist. Ist dieses geschehen; so läßet man nun $\overset{3}{99}$, wovon der Würfel eben gemacht worden, a und $\overset{2}{7}$, b bedeuten. Im übrigen

gen aber verfähret man eben so wie zuvor. Dabey muß man bedenken, daß der Cubus von $\overset{3}{99}$ schon dastehet, und also nur noch nöthig ist, die beyde dreyfache Producten und den Würfel von $\overset{2}{7}$ zu machen, um den Cubus von $\overset{2}{997}$ als den drey ersten Theilen der Wurzel zu bekommen. Nämlich das Quadrat von $\overset{3}{99}$ mit $\overset{2}{7}$ und mit 3 multipliciret, gibt das erste Product. Ferner das Quadrat von $\overset{2}{7}$ mit $\overset{3}{99}$ und wieder mit 3 multipliciret gibt das 2te Produet. Endlich noch den Würfel von $\overset{2}{7}$ gemacht; so bekommt man den Cubus von $\overset{2}{997}$. Hat dieses seine Richtigkeit; so nimmt man $\overset{2}{997}$ nun für a und $\overset{1}{5}$ für b an. Hier ist wieder zu merken daß der Würfel von $\overset{2}{997}$ wirklich schon gemacht ist. Man macht also nur das Quadrat von $\overset{2}{997}$ und multipliciret solches mit $\overset{1}{5}$ und 3; so entstehet das erste Product: Ferner das Quadrat von $\overset{1}{5}$ mit $\overset{2}{997}$ und mit 3 multipliciret, gibt das andere: dazu noch den Würfel von $\overset{1}{5}$ genommen; so ist der ganze Cubus von $\overset{4321}{9975}$ zusammengesetzet. Es soll aber der

der Würfel von $\overset{43210}{99756}$ gemacht werden: Folglich gilt nun a so viel als $\overset{1}{9975}$ und b so viel als $\overset{0}{6}$.

Der Würfel von a = $\overset{1}{9975}$ stehet schon da. Es wird nun noch das Quadrat von $\overset{1}{9975}$ mit $\overset{0}{6}$ und mit 3 multipliciret, welches das erste dreyfache Product gibt. Ferner das Quadrat von $\overset{0}{6}$ mit $\overset{1}{9975}$ und mit 3 multipliciret, so findet sich das andere dreyfache Product: darzu noch den Würfel von $\overset{0}{6}$ gezählet, gibt den ganzen Würfel von $\overset{43210}{99756}$ = M. Grösserer Deutlichkeit wegen bedeute A den Würfel, von den ersten beyden Theilen der Wurzel: B den Würfel von den drey ersten: C den Würfel von den vier ersten: D den Würfel von den fünf ersten Theilen der Wurzel, alsdenn wird die Rechnung folgende Gestalt haben.

$$\overset{43210}{99756} = M$$
$$a + b$$

$$(\overset{4}{9} + \overset{3}{9})^3 = (a + b)^3$$

$$\left(\overset{4}{9}\right)^3 . \overset{4}{9}.\overset{4}{9}.\overset{4}{9} = \overset{12\ 11\ 10\ 9}{\overline{729}} = a^3$$

$$3.\left(\overset{4}{9}\right)^2 . \overset{3}{9} = 3.\overset{4}{9}.\overset{4}{9}.\overset{3}{9} = 2187 = 3a^2b$$

$$3.\overset{4}{9}.\left(\overset{3}{9}\right)^2 = 3.\overset{4}{9}.\overset{3}{9}.\overset{3}{9} = 2187 = 3ab^2$$

$$\left(\overset{3}{9}\right)^3 = \overset{3}{9}.\overset{3}{9}.\overset{3}{9} = 729 = b^3$$

---

$$\left(\overset{3}{99}\right)^3 = \overset{3}{99}.\overset{3}{99}.\overset{3}{99} = 970299 = A$$

$$\overset{3210}{99756} = M$$

$$a + b$$

$$\left(\overset{3}{99} + \overset{2}{7}\right)^3 = (a+b)^3$$

$$\left(\overset{3}{99}\right)^3 = \overset{9876}{\overline{970299}} = A = a^3$$

$$3\left(\overset{3}{99}\right)^2 . \overset{2}{7} = 3.\overset{3}{99}.\overset{3}{99}.\overset{2}{7} = 205821 = 3a^2b$$

$$3.\overset{3}{99}.\left(\overset{2}{7}\right)^2 = 3.\overset{3}{99}.\overset{2}{7}.\overset{2}{7} = 14533 = 3ab^2$$

$$\left(\overset{2}{7}\right)^3 = \overset{2}{7}.\overset{2}{7}.\overset{2}{7} = 343 = b^3$$

---

$$\left(\overset{2}{997}\right)^3 = 991026973 = B$$

$$\overset{210}{99756}$$

$$a+b$$

$$\left(\overset{2}{997} + \overset{1}{5}\right)^3 = (a+b)^3.$$

$$\left(\overset{2}{997}\right)^3$$

$$(997)^3 = 991026973 = B = a$$

$$3\cdot(997)^2\cdot 5 = 3\cdot 997\cdot 997\cdot 5 = 14910135 = 3a^2b$$

$$3\cdot 997\cdot(5)^2 = 3\cdot 997\cdot 5\cdot 5 = 74775 = 3ab^2$$

$$(5)^3 = 5\cdot 5\cdot 5 = 125 = b^3$$

$$(9975)^3 = 992518734375 = C$$

$$99756 = M$$
$$a + b$$

$$(9975 + 6)^3 = (a + b)^3$$

$$(9975)^3 = 992518734375 = C = a^3$$

$$3\cdot(9975)^2\cdot 6 = 1791011250 = 3a^2b$$

$$3\cdot 9975\cdot(6)^2 = 1077300 = 3ab^2$$

$$(6)^3 = 216 = b^3$$

$$(99756)^3 = 99267846273216 = D$$

$$(99756)^3 = M^2 = 992697846273216 = D$$

1 Zus. In den Würfel D der Zahl M sind die Würfel aller einzeln Theile, die dreyfache Producte aus den Quadraten aller vorhergehenden Theilen in den folgenden, und die dreyfache Producte aus allen vorhergehenden Theilen in das

das Quadrat des folgenden Theils der Wurzel M enthalten; wie man deutlich aus den Würfeln A, B, C ꝛc. sehen kann. Auch läßt sich hieraus sehr wohl einsehen, wie vorbenannte Würfel nach und nach entstanden sind. Es ist z. E. um den Würfel B zu bekommen, nur nöthig, daß zu dem Würfel A, das dreyfache Product aus dem Quadrate der Theilen von M, die den Würfel A hervorgebracht, in den nächstfolgenden; ferner das dreyfache Product aus eben den Theilen, wovon A der Cubus ist, in das Quadrat des folgenden, und der Würfel des folgenden Theils der Wurzel, addiret wird. Eben so ist bey dem Würfel C verfahren worden.

2 Zus. Ist der höchste Exponent der Ordn. der Zahl M gleich 4 also grade; so fängt sich der Würfel der Zifer von eben diesem Exponenten in der 3. 4 oder in der 12ten Ordnung an; wie der Würfel A deutlich lehret. Und so würde der Würfel einer Zahl, die 6 zum Exponenten der Ordnung hätte, mit seiner niedrigsten Zifer in der 3. 6 = 18ten Ordnung seinen Anfang nehmen. Hat also überhaupt die höchste Zifer der Zahl M einen graden Exponenten der Ord.; so fängt sich der Würfel eben dieser Zifer in einer dreymal grössern ebenfalls graden Ordnung an. Der Würfel hingegen von der nächstfolgenden Zifer der Zahl M ist in seiner niedrigsten Zifer von der ungraden Ordnung. Und so würde der

Würfel der dritten Zifer von M, über seiner niedrigsten Zifer einen graden Exponenten der Ord. haben. Vorausgesetzet, daß der höchste Exponent der Ord. der Zahl M grade ist; so ist allemal der Würfel der 2ten Zifer von der Linken zur Rechten mit seiner niedrigsten Zifer von der ungraden; der Würfel der dritten mit seiner niedrigsten Zifer von der graden, der Würfel der 4ten mit seiner niedrigsten Zifer von der ungraden, der Würfel der 5ten mit seiner niedrigsten Zifer von der graden Ordnung. Die Würfel A, B, C rc. geben das deutlichste Beyspiel davon.

3 Zus. Wäre aber die höchste Zifer der Zahl M von der 5ten also ungraden Ordnung; so würde der Würfel dieser höchsten Zifer mit seiner niedrigsten Zifer in der 3. 5 = 15ten Ordnung seinen Anfang nehmen. Oder welches einerley ist, der Würfel des höchsten Theils der Zahl M, welcher von der ungraden Ordnung 5 ist, hat seine niedrigste Zifer in einer dreymal grössern d. i. in der 15ten ebenfalls ungraden Ordnung. Dieses bleibet allemal wahr, was auch die höchste Zifer in M vor einen ungraden Exponenten der Ordnung haben mag. Nämlich der Cubus dieser höchsten Zifer fängt sich stets in einer dreymal grösseren ungraden Ordnung an. So ist des Würfels von $\overset{7}{6}$ niedrigste Zifer von der Ordnung 3. 7 = 21; folglich von einer dreymal

grösse-

grössern ungraden Ordnung. Vorausgesetzet, daß $\overset{7}{6}$ oder 6 von der 7ten Ordnung die höchste Zifer in M ausmachte. Bey dieser Voraussetzung würden die Würfel jeder folgenden 2ten, 3ten, 4ten &c. Zifer der Zahl M, mit seiner niedrigsten Zifer abwechselnd, in der graden und ungraden Ordnung seinen Anfang nehmen.

4 Zus. In dem Würfel A von den beyden ersten Theilen der Zahl M, ist der Würfel des ersten Theils mit seiner niedrigsten Zifer von der höchsten, und der Würfel des 2ten Theils mit seiner niedrigsten Zifer von der niedrigsten Ordnung. Die niedrigsten Zifern der beyden dreyfachen Producten fallen mit ihren Ordnungen zwischen die Ordnungen der Würfel, von dem ersten, und von dem 2ten Theil. Welches auch daraus schon erhellet, weil der Exponent der Ordnung allemal im ersten Würfel 3 Einheiten mehr hat, als der Exponent der Ord. im andern. Dieses findet immer statt, es mag der erste Theil von M aus einer oder aus mehreren Zifern bestehen. Wie z. E. der Würfel C deutlich lehret. Wo der Würfel des ersten Theils von M mit seiner niedrigsten Zifer von der 6ten und der Würfel des folgenden in der 3ten Ord. mit seiner niedrigsten Zifer den Anfang nimmt. Obgleich dieser erste Theil aus drey und der folgende aus einer Zifer bestehet.

5 Zus. Man kann die Zahl M = $\overset{43210}{99756}$ allemal in 3 Theile zerlegen, wovon der erste aus etlichen, der 2te immer aus einer, der dritte aber aus einer oder etlichen Zifern bestehet. Es heisse der erste N, der andere q und der dritte O; so soll in dem Würfel B; $\overset{3}{99}$ gleich N; $\overset{2}{7}$ gleich q und $\overset{0}{56}$ gleich O seyn; so daß $N + q + O = \overset{3}{99} + \overset{2}{7} + \overset{0}{56}$ der Zahl M gleich ist. Der Würfel von $N + q = \overset{3}{99} + \overset{2}{7}$ ist der in B. Wo also auch nichts vom dritten Theil, d. i. von $O = \overset{0}{56}$ vorkommt. Von $N + q$ ist der Würfel $N^3 + 3\,N\,q + 3\,N\,q^2 + q^3 = (\overset{3}{99})^3 + 3\cdot(\overset{3}{99})^2\cdot\overset{2}{7} + 3\cdot\overset{3}{99}\cdot(\overset{2}{7})^2 + (\overset{2}{7})^3$. Aus Betrachtung des Würfels B ist offenbahr $N^3 = (\overset{3}{99})^3$ von der höchsten; $q^3 = (\overset{2}{7})^3$ von der niedrigsten Ordnung in dem Würfel von $N + q$. Es fallen also $3\,N^2\,q = 3\cdot(\overset{3}{99})^2\cdot\overset{2}{7}$ und $3\,N\,q^2 = 3\cdot\overset{3}{99}\cdot(\overset{2}{7})^2$ mit ihren Ordnungen zwischen die Ordnungen von $N^3$ und $q^3$. Es sind hier allemal die Ordnungen über den niedrigsten Zifern zu verstehen. Aus diesem und den vorhergehenden Zusatze wird man nun leicht verstehen lernen, was die Mey-

nung des Hrn. Hofrath Kästners in seinen Anfangsgründen der Arithmetik und Geometrie im 4ten Capitel §. 36 und 37 u. s. w. gewesen. Wenn nur hier statt 3 über $\overset{3}{99}$, das dortige n gesetzet wird.

6 Zus. Aus dem höchsten Exponenten der Ord. der Zahl M kann man leicht erkennen wie viel Zifern der Würfel von M in sich enthalten müsse. Man hat nur nöthig den Würfel von der höchsten Zifer in M zu machen. Hat dieser Würfel 3 Zifern; so ist, weil die niedrigste davon den Exponenten der Ord. $3 . 4 = 12$ hat, die höchste von der Ord. $3 . 4 + 2 = 12 + 2 = 14$ hierzu 1 addiret gibt die Menge der Zifern in dem Würfel von M. Denn aus A ist offenbar, daß wenn der Würfel der höchsten Zifer, 3 Zifern hat, die übrige beyden 3 fache Producten diese Zifern nicht so sehr vergrössern können, daß eine Zifer von der Ordnung $3 . 4 + 3 = 12 + 3 = 15$ herauskäme. Wie auch aus dem Würfel D klar in die Augen leuchtet. Um dieses desto besser einzusehen, wurden zu den beyden höchsten Theilen der Zahl M, mit Fleiß auch die beyden größten Zifern angenommen. Die Würfel von allen einzeln Zifern, die grösser als 3 sind, haben 3 Zifern; Folglich gilt von allen diesen eben das, was kurz vorher von der höchsten Zifer in M behauptet worden. Ist

aber die höchste Zifer in M, 3, 2, oder 1; so muß man den Würfel von den beyden höchsten Zifern machen, um mit Hülfe des höchsten Exponenten der Ord. in M recht bestimmen zu können, wie viel Zifern eigentlich im Würfel von M enthalten seyn werden. Gesetzt es wären in unsern Exempel statt $\overset{43}{99}$ nun $\overset{43}{29}$; so würde der Würfel von $\overset{4}{2}$ gleich $\overset{3\cdot 4}{8} = \overset{12}{8}$ seyn. Das 3fache Product aber aus dem Quadrat von $\overset{4}{2}$ in $\overset{3}{9}$ wäre gleich $\overset{11}{108}$: Ferner das dreyfache Product aus $\overset{4}{2}$ in das Quadrat von $\overset{3}{9}$ gleich $\overset{10}{486}$. Werden diese 3 Theile nach ihren Ordnungen untereinander gesetzet, und zusammen gezählet; so wird man finden, daß der Würfel von $\overset{4}{2}$ mit seiner Zifer, und die Zifern aus den Producten, zusammen eine Zifer von der Ord. $3\cdot 4 + 1 = 12 + 1 = 13$ hervorbringen. Nun braucht man zu diesem höchsten Exponenten, 1 zu addiren, um in diesem Fall die Menge der Zifern des Würfels von M zu haben.

7 Zus. Der Würfel des höchsten Theils von M hat über seiner niedrigsten Zifer einen dreymal grössern Exponenten der Ordnung, als der höchste Exponent in M gewesen. Es ist nämlich $\overset{4}{9}$ der höchste Theil von M und also auch 4 der

höchste

höchste Exponent. Aber des Würfels von $9^{4}$ niedrigste Zifer ist von der 3. 4 = 12ten folglich dreymal grössern Ordnung. Sind also die Zifern des Würfels D von der Wurzel M gegeben, und man will aus diesen Zifern schon zum voraus angeben, wie viel Zifern oder Theile die Wurzel habe; so braucht man nur die Exponenten über den 3 höchsten Zifern in D zu untersuchen, welcher von diesen dreyen sich mit 3 dividiren lässet. Denn aus der Zusammensetzung eines Würfels ists offenbar, daß einer davon mit 3 dividiret werden kann. Weil der Würfel der höchsten Zifer von jeder Wurzel oder Zahl niemals mehr als 3 Zifern hat. Der Quotient, der durch die Division eines der 3 höchsten Exponenten in D durch 3 erlangt wird, gibt den höchsten Exponenten der Wurzel. Zu diesem 1 addiret findet sich die Menge der Zifern von der Wurzel M. In dem Exempel sind die 3 höchsten Exponenten 14, 13, 12, wovon sich nur 12 mit 3 dividiren lässet. Der Quotient ist 4 und folglich auch der höchste Exponent der Wurzel M. Zu 4 noch 1 addiret gibt 4 + 1 = 5 gleich der Anzahl Zifern in M. So verfähret man bey jedem andern Exempel. Es ist wohl nicht nöthig zu erinnern, daß dieses nur alsdann wahr ist, wenn M eine ganze Zahl oder wenn D ein vollkommener Würfel gewesen. Sollte aber M noch Decimalzifern bekommen, d. i. wäre D kein

eigentlicher Würfel; so würde vorhergehende Rechnung nur die Menge der ganzen Zifern, nicht aber der Decimalzifern geben.

8 Zus. Man kann die einzelne Theile der Zahl $M = \overset{4}{9}\overset{3}{9}\overset{2}{7}\overset{1}{5}\overset{0}{6}$ eben so, wie § 21; 10 Zus. mit besondern Buchstaben p; q; r; s; ꝛc. benennen. Es wäre alsdenn $p = \overset{4}{9}$; $q = \overset{3}{9}$; $r = \overset{2}{7}$; $s = \overset{1}{5}$; $t = \overset{0}{6}$. Folglich $M = \overset{4}{9}\overset{3}{9}\overset{2}{7}\overset{1}{5}\overset{0}{6} = \overset{4}{9} + \overset{3}{9} + \overset{2}{7} + \overset{1}{5} + \overset{0}{6} = p + q + r + s + t$. Wie also § 31, a bald eine, bald zwey bald drey ꝛc. Theile und b den nächstfolgenden von M bedeutete; eben so kann a auch entweder p, oder $p + q$ oder $p + q + r$ u. s. w. und b allemal den drauf folgenden q; oder r; oder s vorstellen. Der Würfel von $p + q$ soll eben wie § 31, A; der Würfel von $(p + q) + r$, B; der von $(p + q + r) + s$, C; der von $(p + q + r + s) + t$; D, heissen. Da nun der Würfel einer Zahl heraus kommt, wenn das Quadrat eben dieser Zahl wieder mit der Wurzel multipliciret wird (§ 2) so ist, die einzelne Quadrate aus § 21, 10 Zus. hier hergesetzet:

1) $$(p+q)^2 = p^2 + 2pq + q^2$$
$$p+q = p+q$$

---

$$(p+q)^3 = p^3 + 2p^2q + pq^2$$
$$+ p^2q + 2pq^2 + q^3$$

---

$$(p+q)^3 = A = p^3 + 3p^2q + 3pq^2 + q^3$$

2) $$(p+q+r)^2 = (p+q)^2 + 2(p+q)r + r^2$$
$$(p+q) + r = (p+q) + r$$

---

$$((p+q)+r)^3 = (p+q)^3 + 2(p+q)^2 . r +$$
$$(p+q)r^2 + (p+q)^2 r + 2(p+q)r^2 + r^3$$

---

$$((p+q)+r)^3 = (p+q)^3 . + 3(p+q)^2 r + 3$$
$$(p+q)r^2 . + r^3 = B = A + 3(p+q)^2 .$$
$$r + 3(p+q) . r^2 + r^3$$

3) $$((p+q+r)+s)_2 = (p+q+r)_2 + 2$$
$$(p+q+r) . s + s_2$$
$$((p+q+r)+s) = (p+q+r) + s$$

---

$$((p+q+r+s)^3 = (p+q+r)^3 + 2(p+q+r)^2 .$$
$$s + (p+q+r)s^2 + (p+q+r)^2 s$$
$$+ 2(p+q+r)s^2 + s^3$$

---

$$= (p+q+r)^3 + 3(p+q+r)^2 . s + 3$$
$$(p+q+r)s^2 + s^3$$
$$= C = B + 3(p+q+r)^2 . s + 3(p+q+r)$$
$$s^2 + s^3.$$

$$4)\ ((p+q+r+s)+t)^2 = (p+q+r+s)^2 + 2((p+q+r+s)\ t + t^2$$
$$((p+q+r+s)+t) = (p+q+r+s)+t.$$

---

$$((p+q+r+s)+t)^3 = (p+q+r+s)^3 + 2(p+q+r+s)^2 t.\ t + (p+q+r+s)t^2 + (p+q+r+s)^2. + 2(p+q+r+s)t^2 + t^3$$

---

$$= (p+q+r+s)^3 + 3(p+q+r+s)^2.\ t + 3(p+q+r+s)\ t^2 + t^3$$
$$= D = C + 3(p+q+r+s)^2.\ t + 3(p+q+r+s)\ t^2 + t^3.$$

Und so wird die Art weiter zu gehen leicht in die Augen fallen. Auch hier findet man eine völlige Uebereinstimmung mit dem, was § 31 und dessen Zusätze bey der Zusammensetzung des Würfels von M angeführet worden ist.

9 Zus. Die einzelne Theile des Würfels von M in § 31 kann man nun auch auf folgende Weise nach ihren Ordnungen untereinandersetzen.

| | 12 | 11 10 9 | 8 7 6 | 5 4 3 | 2 1 0 | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\left(\overset{4}{9}\right)^3 =$ | 729 | | | | | $= a^3 = p^3$ |
| $3\cdot\left(\overset{4}{9}\right)^2\cdot\overset{3}{9} =$ | 218 | 7 | | | | $= 3a^2b = 3p^2q$ |
| $3\cdot\overset{4}{9}\cdot\left(\overset{3}{9}\right)^2 =$ | 21 | 87 | | | | $= 3ab^2 = 3pq^2$ |
| $\left(\overset{3}{9}\right)^3 =$ | | 729 | | | | $= b^3 = q^3$ |
| A | | | | | | |
| $3\cdot\left(\overset{3}{99}\right)^2\cdot\overset{2}{7} =$ | 20 | 582 | 1 | | | $= 3a^2b = 3(p+q)^2\cdot r$ |
| $3\cdot\overset{3}{99}\cdot\left(\overset{2}{7}\right)^2 =$ | | 145 | 53 | | | $= 3ab^2 = 3(p+q)\cdot r^2$ |
| $\left(\overset{2}{7}\right)^3 =$ | | | 343 | | | $= b^3 = r^3.$ |
| B | | | | | | |
| $3\cdot\left(\overset{2}{997}\right)^2\cdot\overset{1}{5} =$ | 1 | 491 | 013 | 5 | | $= 3a^2b = 3(p+q+r)^2\cdot s$ |
| $3\cdot\overset{2}{997}\cdot\left(\overset{1}{5}\right)^2 =$ | | | 747 | 75 | | $= 3ab^2 = 3(p+q+r)\cdot s^2$ |
| $\left(\overset{1}{5}\right)^3 =$ | | | | 125 | | $= b^3 = s^3$ |
| C | | | | | | |
| $3\cdot\left(\overset{1}{9975}\right)^2\cdot\overset{0}{6} =$ | | 179 | 101 | 125 | 0 | $= 3a^2b = 3(p+q+r+s)^2\cdot t$ |
| $3\cdot\left(\overset{1}{9975}\right)\cdot\left(\overset{0}{6}\right)^2 =$ | | | 10 | 773 | 00 | $= 3ab^2 = 3(p+q+r+s)\, t^2$ |
| $\left(\overset{0}{6}\right)^3 =$ | | | | | 216 | $= b^3 = t^3.$ |
| | 14 13 12 | 11 10 9 | 8 7 6 | 5 4 3 | 2 1 0 | |
| D = | 9 9 2 | 6 9 7 | 846 | 273 | 216 | |

10 Zus. Wenn die Zusammensetzung dieses Würfels etwas genauer angesehen wird; so wird man gewahr werden, daß wenn man die untere Zahl D von der Rechten zur Linken in Classen theilet, und jeder Classe 3 Zifern gibt, auch kann die letzte Classe zur Linken nur 2 oder eine Zifer haben, alsdenn in der letzten Zifer der ersten Classe von der Linken zur Rechten gezählet, der Cubus des ersten Theils der Wurzel enthalten ist: In der ersten Zifer der 2ten Classe fängt sich an das dreyfache Product aus dem Quadrate des ersten Theils in den 2ten: In der 2ten Zifer dieser Classe stehet mit seiner niedrigsten Zifer das dreyfache Product aus dem ersten Theil in das Quadrat des 2ten. In der letzten Zifer angeführter Classe macht der Cubus des 2ten Theils seinen Anfang. In der ersten Zifer der 3ten Classe stehet mit seiner niedrigsten Zifer das dreyfache Product aus dem Quadrate der beyden ersten Theilen in den 3ten: In der 2ten Zifer das dreyfache Product aus den ersten beyden Theilen in das Quadrat des dritten: In der letzten Zifer der nämlichen Classe der Cubus des dritten Theils der Wurzel. In der ersten Zifer der 4ten Classe fängt sich mit seiner niedrigsten Zifer das dreyfache Product aus dem Quadrate der ersten drey Theilen in den 4ten: In der 2ten Zifer der 4ten Classe das dreyfache Product aus den ersten 3 Theilen in das Quadrat des 4ten: In der 3ten Zifer der 4ten Classe der Cubus des

4ten

4ten Theils der Wurzel. Das dreyfache Product aus dem Quadrate der ersten 4 Theile in den 5ten stehet mit seiner niedrigsten Zifer in der ersten Zifer der 5ten Classe: das dreyfache Product aus den ersten vier Theilen in das Quadrat des 5ten stehet mit seiner niedrigsten Zifer in der 2ten Zifer dieser Classe: der Würfel des 5ten Theils der Wurzel stehet mit seiner niedrigsten Zifer in der letzten Zifer genannter Classe. Wären nun noch mehrere Classen vorhanden; so würde in der ersten Zifer der 6ten Classe, das dreyfache Product aus dem Quadrate der 5 ersten Theilen in den 6ten mit seiner niedrigsten Zifer seinen Anfang machen: In der zweyten Zifer eben derselben Classe, das dreyfache Product aus den 5 ersten Theilen in das Quadrat des 6ten: In der dritten Zifer der 6ten Classe der Cubus des 6ten Theils der Wurzel. Und so weiter. So viel Classen es also gibt; so viel Theile bekommt auch die Wurzel.

§. 32.

Da aus dem kurz vorhergehenden 9ten und 10ten Zusatze bekannt genug ist, wo die Theile eines Würfels liegen, und wo sie mit ihren niedrigsten Zifern den Anfang machen; so kann es nun nicht schwer fallen, aus einer Zahl D als ein Würfel betrachtet die Cubikwurzel zu suchen. Besonders wenn noch alles recht beobachtet wird, was § 29 gesagt worden. Man theilt nämlich

1) wie

1) wie dorten die Zifern der Zahl D von der Rechten zur Linken in Classen, und gibt jeder Classe 3 Zifern, die höchste zur Linken, kann auch nur zwo oder eine haben. Nun verfähret man in den ersten beyden Classen eben so wie § 29 gelehret worden ist. Am Anfang der dritten Classe suchet man

2) das dreyfache Product aus dem Quadrate der eben gefundenen Theilen in den 3ten auf diese Art: Man macht das Quadrat von den beyden ersten Theilen, nimmt solches dreymal, was herauskommt, setzet man mit seiner niedrigsten Zifer grade unter die erste der dritten Classe, schliesset solches in Klammern, und dividiret in die drüber stehenden Zifern mit eben der Sorgfalt, als §. 29 empfohlen wurde. Der gefundene Quotient, welcher der dritte oder neue Theil der Wurkel ist, mit dem Divisor multipliciret, gibt das dreyfache Product aus dem Quadrate der beyden ersten Theilen in den 3ten, welches nun von dem Dividendus abgezogen wird. Den Rest zu der 2ten Zifer eben dieser Classe gezählet und davon das dreyfache Product aus dem Quadrate des dritten Theils in die beyden ersten abgezogen, was bleibt zu der letzten Zifer von der Classe genommen, und hievon den Würfel des dritten Theils ebenfalls abgezogen; so ist man mit den 3 ersten Theilen der Wurzel zu Ende. Den hier entstandenen Rest nimmt man weiter

3) zu der ersten Zifer der 4ten Classe; nun wird

wird das Quadrat von den drey ersten Theilen gemacht, das dreyfache desselben mit seiner niedrigsten Zifer unter die erste der 4ten Classe gesetzet, in Klammern eingeschlossen, und in die drüber stehende Zifern, wie gewöhnlich dividiret, der Quotient gibt den vierten Theil der Wurzel. Dieser Quotient mit dem Divisor multipliciret, kommt das dreyfache Product aus dem Quadrate der ersten drey Theilen in den 4ten; welches Product aus dem Quadrate der ersten drey Theile in den 4ten; wieder von dem Dividendus abgezogen wird. Ist ein Rest vorhanden; so nimmt man solchen zu der 2ten Zifer dieser Classe, und ziehet davon ab, das dreyfache Product aus dem Quadrate des 4ten Theils in die 3 vorhergehende. Der aufs neue erhaltene Rest zur dritten Zifer der 4ten Classe gerechnet, und davon den Würfel eben dieses vierten Theils der Wurzel abgezogen; alsdenn ist man auch mit den ersten vier Theilen der Wurzel fertig. Der gebliebene Rest kommt nun

4) zur ersten Zifer der 5ten Classe, wo man im übrigen, nach eben den Regeln wie vorher den 5ten Theil der Wurzel suchet. Um sich alles recht geläufig zu machen, muß in § 29 alles ofte wiederholet, und mit den kurz vorhergegebenen Regeln verglichen werden. Auch können die Buchstaben vieles zur Erläuterung mit beytragen, wenu man sich ihrer bedien will. Nachfolgendes Exempel ist vollkommen nach den Vorschriften in § 29 und § 32 gerechnet worden.

992,697,846,273,216 | 43210 . . .

$p^3 = 729$ | 99756 = M.

2636 | $p+q+r+s+t$

$3p^2 = (243)$

$3p^2 q = 2187$

·4499

$3pq^2 = 2187$

23.1.2.7

$q^3 = 729$

223988

$3(p+q)^2 = (29403)$

$3(p+q)^2 . r = 205821$

·181674

$3.(p+q).r^2 = 14553$

1671216

$r^3 = 343$

16708732

$3(p+q+r)^2 = (2982027)$

$3.(p+q+r)^2 r = 14910135$

·17985977

$3.(p+q+r).r^2 = 74775$

179112023

$s^3 = 125$

1791118982

$3.(p+q+r+s)^2 = (298501875)$

$3.(p+q+r+s)^2 . t = 1791011250$

· · · 1077321

$3.(p+q+r+s).t^2 = 1077300$

· · · · 216

$t^3 = 216$

· · ·

§. 33

## §. 33.

Nach den Vorschriften in § 31 und dessen 8ten Zusatze, kann mit leichter Mühe der Würfel von einer Zahl N gemacht werden, die aus ganzen und Decimalzifern bestehet. Wenn man sich nur § 10 wohl bekannt gemacht hat. Es sey also

$$N = \overset{1}{5}\,\overset{0}{6}\,\overset{-1}{7}\,\overset{-2}{3} = \overset{1}{5} + \overset{0}{6} + \overset{-1}{7} + \overset{-2}{3} = p + q + r + s;$$

so wird der Würfel davon folgende Gestalt haben.

| | 3 | 2 1 0 | -1 -2 -3 | -4 -5 -6 | |
|---|---|---|---|---|---|
| $\left(\overset{-1}{5}\right)^3 = \overset{1}{5}\cdot\overset{1}{5}\cdot\overset{1}{5} =$ | 125 | | | | $= a^3$ |
| $3\cdot\left(\overset{-1}{5}\right)^2\cdot\overset{0}{6} = 3\cdot\overset{1}{5}\cdot\overset{1}{5}\cdot\overset{0}{6} =$ | 45 | 0 | | | $= 3a^2b$ |
| $3\cdot\overset{1}{5}\cdot\left(\overset{0}{6}\right)^2 = 3\cdot\overset{1}{5}\cdot\overset{0}{6}\cdot\overset{0}{6} =$ | 5 | 40 | | | $= 3ab^2$ |
| $\left(\overset{0}{6}\right)^3 = \overset{0}{6}\cdot\overset{0}{6}\cdot\overset{0}{6} =$ | | 216 | | | $= b^3$ |
| A | | | | | |
| $3\cdot\left(\overset{0}{56}\right)^2\cdot\overset{-1}{7} = 3\cdot\overset{0}{56}\cdot\overset{0}{56}\cdot\overset{-1}{7} =$ | 6 | 585 | 6 | | $= 3a^2b$ |
| $3\cdot\overset{0}{56}\left(\overset{-1}{7}\right)^2 = 3\cdot\overset{0}{56}\cdot\overset{-1}{7}\cdot\overset{-1}{7} =$ | | 82 | 32 | | $= 3ab^2$ |
| $\left(\overset{-1}{7}\right)^3 = \overset{-1}{7}\cdot\overset{-1}{7}\cdot\overset{-1}{7} =$ | | | 343 | | $= b^3$ |
| B | | | | | |
| $3\cdot\left(\overset{-1}{567}\right)^2\cdot\overset{-2}{3} = 3\cdot\overset{-1}{567}\cdot\overset{-1}{567}\cdot\overset{-2}{3}$ | | 289 | 340 | 1 | $= 3a^2b$ |
| $3\cdot\overset{-1}{567}\cdot\left(\overset{-2}{3}\right)^2 = 3\cdot\overset{-1}{567}\cdot\overset{-2}{3}\cdot\overset{-2}{3} =$ | | | 153 | 09 | $= 3ab^2$ |
| $\left(\overset{-2}{3}\right)^3 = \overset{-2}{3}\cdot\overset{-2}{3}\cdot\overset{-2}{3} =$ | | | | 27 | $= b^3$ |
| C = | 182 | 573 | 756 | 217 | |

Zus.

Zus. Auch hievon gilt alles, was §. 31, und den darzu gehörigen Zusätzen erinnert worden. Die Ausziehung der Cubikwurzel aus der Zahl C wird nach den in § 29 und 32 gegebenen Regeln nun leicht von statten gehen; indem aus der Zusammensetzung bekannt ist, was man in jeder Classe zu suchen hat.

3 2 1 0 -1 -2 -3 -4 -5 -6 | 1 0 -1 -2

$C = 182,\ 573,\ 756,\ 217$ | $5673 = N.$

$a^3 = p^3 = 125$ | $p + q + r + s$

575

$3a^2 = 3p^2 = (75)$

$3a^2 b = 3p^2 q = 450$

1257

$3ab^2 = 3pq^2 = 540$

7173

$b^3 = q^3 = 216$

69577

$3a^2 = 3(p+q)^2 = (9408)$

$3a^2 b = 3(p+q)^2 . r = 65856$

37215

$3ab^2 = 3(p+q)r^2 = 8232$

289836

$r^3 = 343$

2894932

$3a^2 = 3(p+q+r) = (964467)$

$3a^2 b = 3(p+q+r)^2 . s = 2893401$

15311

$3ab^2 = 3(p+q+r)s^2 = 15309$

27

$b^3 = s^3 = 27$

0

§. 34.

## §. 34.

Von einer Zahl P den Würfel zu machen, die lauter Decimalziffern hat, darf man nur den 11ten § vor Augen haben und die bey den vorigen Exempeln angewendete Regeln beobachten: so wird ohne Schwierigkeit der Würfel davon zu Stande gebracht werden können. Wenn also P = $\overset{-1-2-3}{436} = \overset{-1}{4} + \overset{-2}{3} + \overset{-3}{6} = p + q + r$ ist; alsdenn wird der Würfel dieser Zahl nach (§ 31) seyn, wie folget.

| | | | |
|---|---|---|---|
| $-3$ | $-4-5-6-7-8-9$ | | |
| $\left(\overset{-1}{4}\right)^3 = 4\cdot 4\cdot 4 = 64$ | | | $= p^3$ |
| $3\cdot\left(\overset{-1}{4}\right)^2\cdot\overset{-2}{3} = 3\cdot 4\cdot 4\cdot 3 = 14$ | 4 | | $= 3p^2q$ |
| $3\cdot 4\cdot\left(\overset{-2}{3}\right)^2 = 3\cdot 4\cdot 3\cdot 3 = 1$ | 08 | | $= 3pq^2$ |
| $\left(\overset{-2}{3}\right)^3 = \overset{-2}{3}\cdot\overset{-2}{3}\cdot\overset{-2}{3} =$ | 27 | | $= q^3$ |
| A | | | |
| $3\cdot\left(\overset{-2}{43}\right)^2\cdot\overset{-3}{6} = 3\cdot\overset{-2}{43}\cdot\overset{-2}{43}\cdot\overset{-3}{6} = 3$ | 328 | 2 | $= 3\,(p+q)^2\cdot r$ |
| $3\cdot\overset{-2}{43}\cdot\left(\overset{-3}{6}\right)^2 = 3\cdot\overset{-2}{43}\cdot\overset{-3}{6}\cdot\overset{-3}{6} =$ | 15 | 48 | $= 3\,(p+q)\,r^2$ |
| $\left(\overset{-3}{6}\right)^3 = \overset{-3}{6}\cdot\overset{-3}{6}\cdot\overset{-3}{6} =$ | | 216 | $= r^3$ |
| B $=$ 82 | 850 | 896 | |

Zus. Bey Ausziehung der Cubikwurzel aus der Zahl B ist das nämliche Verfahren zu beobachten, was in den ersten gegebenen Beyspielen gebraucht wurde. Folglich

—3—4—5—6—7—8—9 | 1 2 3

$$B = \overline{82,\ 8\ 5\ 0,\ 8\ 9\ 6} \;\Big|\; \overline{4\ 3\ 6} = P.$$

$$a^3 = p^3 = \underline{64} \qquad \Big|\; p + q + r$$

188

$$3a^2 = 3p^2 = (48)$$

$$3a^2b = \underline{3p^2q = 144}$$

445

$$3ab^2 = \underline{3pq^2 = 108}$$

3370

$$b^3 = \underline{q^3 = 27}$$

33438

$$3a^2 = 3(p+q)^2. = (5547)$$

$$3a^2b = 3\underline{(p+q)^2.r = 33282}$$

1569

$$3ab^2 = 3(p\underline{+q).r^2. = 1548}$$

216

$$b^3 = r^3 = \underline{216}$$

## §. 35.

Die Exempel in § 33 und 34 geben augenscheinlich zu erkennen, wie man sich zu verhalten habe, wenn von einer Zahl S mit ganzen und Decimalzifern, oder mit lauter Decimalzifern der Würfel gemacht, und umgekehret, wenn aus einer solchen Zahl die Cubikwurzel gezogen werden soll. Es seye S = 34, 26. Soll hieraus die Cubikwurzel gezogen werden; so ist nothwendig, daß man bemerke, was vor einen negativen Exponenten der Ord. die niedrigste Zifer von S habe. Ist der Exponent so beschaffen, daß er sich nicht mit 3 dividiren lässet; so müssen rechter Hand dieser niedrigsten Zifer so viel Nullen angehänget werden, bis sich endlich einer von den Exponenten der Ord. auf einer solchen Null mit 3 dividiren lässet. Hat man einen solchen Exponenten gefunden; so wird von da an zur Linken die Zahl in Classen getheilet, und die Wurzel daraus gesuchet, wie § 33 und 34 gelehret worden. Die niedrigste Zifer von S ist $\overset{-2}{6}$, wo der Exponent = — 2 sich nicht mit 3 dividiren lässet, wird aber nur noch eine Null zur Rechten

der

—2
der 6 gehänget; so daß $S = 34,\overset{-1}{2}\;\overset{-2}{6}\;\overset{-3}{0}$ wird; alsdenn gibt sich der Exponent — 3 und dieser lässet sich mit 3 dividiren. Man siehet auch daß durch die angehängte Nullen, die Zahl S nicht vergrössert wird, indem die Zifern alle noch ihre vorige Stelle behalten, folglich auch ihr Werth nicht geändert wird. Worauf just so viel Nullen angehängt werden müssen, bis der Exponent über einer solchen Null mit 3 dividiret werden kann, das erhellet aus den Beyspielen in § 33 und 34. Denn theilet man die Zahl $S = 34,\overset{-1}{2}\;\overset{-2}{6}\;\overset{-3}{0}$ von der Rechten zur Linken in Classen: so stimmt alles mit der Zusammensetzung eines Würfels von der Art übers ein. Es hat alsdenn die niedrigste Zifer einer jeden Classe, einen Exponenten der Ordnung, der sich mit 3 dividiren lässet, welches nach den vorigen Beyspielen nothwendig zu einer jeden Classe erfodert wird. Man siehet auch hieraus, daß wenn einer Zahl, die kein eigentlicher Würfel ist, Nullen angehängt werden sollen, diese angehängte Nullen als Decimalzifern zu betrach-

ten sind. Auch ist leicht zu übersehen, daß die Nullen in diesem letzten Fall allemal zu drey angehängt werden müssen. Ein Exempel wird die Sache klar machen.

Es seye also aus der Zahl Q = 75 die Cubikwurzel zu ziehen; so ist:

| | -1-2-3-4-5-6-7-8-9-10-11-12 | 0.1.2.3.4 |
|---|---|---|
| Q | 75, 000 000 000 000 | 42171 |
| | | p+q+r +s+t |

$p^3 = 64$

110

$3p^2 = (48)$

$3p^2q = 96$

140

$3pq^2 = 48$

920

$q^3 = 8$

9.1.2.0

$3\,(p+q)^2 = (5292)$

$3\,(p+q)^2.\ r = 5292$

38280

$3\,(p+q).\ r^2 = 126$

381540

$r^3 = 1$

3815390

$3\,(p+q+r)^2 = (531723)$

$3\,(p+q+r)^2.\ s = 3722061$

..933290

$3\,(p+q+r).\ s^2 = 61887$

8714030

$s^3 = 343$

87136870

$3\,(p+q+r+s)^2 = (53349267)$

$3\,(p+q+r+s)^2.\ t = 53349267$

337876030

$3\,(p+q+r+s).\ t^2 = 12651$

3378633790

$t^3 = 1$

$R = 3378633789$

Die

Die Probe von diesem Exempel wird nach §. 11 folgende Gestalt haben.

```
                                  —4
                              42171
                                  —4
                              42171
                         ——————————
                              42171
                            295197
                           42171
                          84342
                        168684    —8
                   ————————————————
                         1778393241
                                 —4
                              42171
  —————————————————————————————————
                         1778393241
                        12448752687
                       1778393241
                      3556786482
                     7113572964  —12
  —————————————————————————————————
                     74996621366211
                                —12
              R =        3378633789
  —————————————————————————————————
                  75,000000000000
```

Anhang.

# Anhang.

Da in dem letzten Bogen dieser Abhandlung noch Raum leer geblieben ist, so glaubte ich Anfängern einen Gefallen zu erweisen, wenn ich diesen Platz mit einer Erläuterung des 31, 32, 33, und 34 § in dem 5ten Capitel des Hrn. Hofr. Kästners Arithmetik ausfüllen liesse. Die §§ sollen eben so nacheinander folgen, wie sie kurz vorher angeführet wurden. Es macht also der 31 § den Anfang.

## §. 31.

Es wird hier als bekannt vorausgesetzet, was ein Verhältniß und eine Proportion seye: Weiter was die Zahlen oder Glieder einer Verhältniß oder Proportion vor besondere Nahmen erhalten. Ist die Proportion 12 : 4 = 6 : 2 richtig; so ist (4) so oft in (12) enthalten als (2) in (6); Und es muß auch (12) mit (2) multipliciret, ein so grosses Product geben, als (4) mit (6) gibt: Mit andern Worten: Das Product der beyden äussern Glieder (12) und (2) ist dem Producte aus den beyden mittleren (4) und (6) gleich. Denn $12 : 4 = \frac{12}{4}$; und $6 : 2 = \frac{6}{2}$, weil Brüche und Quotienten einerley sind.

Daher

Daher kann die vorige Proportion auch so geschrieben werden: $\frac{12}{4} = \frac{6}{2}$; diese gleiche Brüche auf einerley Benennung gebracht; kommt $\frac{12.\ 2}{4.\ 2} = \frac{12}{4}$; und $\frac{6.\ 4}{2.\ 4} = \frac{6}{2}$; woraus $\frac{12.\ 2}{4.\ 2} = \frac{6.\ 4}{2.\ 4}$ wird. Diese Brüche haben nun einerley Nenner und auch einerley Werthe; daher müssen ihre Zähler ebenfalls gleich, oder 12. 2 = 6. 4 seyn. W. z. w.

In obiger Proportion waren die vorhergehenden Glieder grösser als die folgenden. Es soll nun auch gezeigt werden, daß der nämliche Beweiß statt hat, wenn eine Proportion 3 : 6 = 4 : 8 gegeben, wo die vorhergehenden Glieder kleiner als die folgenden sind. Soll diese Proportion wahr seyn; so kann man hier nicht sagen, daß (6) so oft in (3) enthalten seye, als (8) in (4); sondern man muß sagen; so ein grosser Theil von (6) in (3) enthalten ist, eben ein so grosser Theil von (8) ist auch in (4) enthalten. Aber von (6) ist die Hälfte in (3) enthalten, also muß von (8) auch die Hälfte in (4) enthalten seyn. Da nun 3 : 6 = $\frac{3}{6}$; und 4 : 8 = $\frac{4}{8}$; aus den Grunde, weil Brüche und Quotienten einerley

einerley sind; so läßt sich die Proportion 3: 6 = 4: 8 auch in zween Brüchen $\frac{3}{6} = \frac{4}{8}$ ausdrücken. Diese Brüche auf einerley Benennung gebracht, gibt $\frac{3.8}{6.8} = \frac{3}{6}$ und $\frac{4.6}{8.6} = \frac{4}{8}$; daher $\frac{3.8}{6.8} = \frac{4.6}{8.6}$; d. i. von diesen gleichen Brüchen sind die Nenner gleich, folglich müssen ihre Zähler auch gleich, oder 3. 9 = 4. 6 seyn. Mit Worten ausgedruckt, heißt dieß so viel: das Product der äusseren Glieder (3) und (8) ist so groß, wie das Product aus den mittleren (4) und (6).

Die Sache ganz allgemein zu machen, nehme man überhaupt eine Proportion A: B = C: D als richtig an. Hier sind zween Fälle zu merken 1) (A) kann grösser als (B) und folglich auch (C) grösser als (D) seyn. Findet dieser Fall statt, und die Proportion soll richtig bleibeu; so muß (B) so oft in (A) enthalten seyn als (D) in (C); 2) wenn (A) kleiner als (B) ist; so muß auch (D) kleiner als (C) seyn. In dem letzten Falle ist nur ein eben so grosser Theil von (B) in (A) enthalten, als ein grosser Theil von (D) in (C) steckt. In beyden Fällen gibt das erste Glied (A) mit dem vierten (D) multipliciret, ein Product, das so groß ist, als das

das Product aus dem zweyten Glied (B) in das dritte (C). Mit andern Worten: das Product der beyden äusseren Glieder (A) und (D) einer Proportion, ist so groß, als das Product der beyden mittleren (B) und (C). Denn die Proportion A: B = C: D lässet sich auch in zween gleichen Brüchen $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$ ausdrücken; weil Quotienten und Brüche einerley sind. Solche gleiche Brüche auf einerley Benennung gebracht, gibt $\frac{A.D}{B.D} = \frac{C.B}{D.B}$; folglich da die Brüche gleiche Nenner und auch gleiche Werthe haben; so müssen auch ihre Zähler gleich seyn, oder es ist A. D = C. B. W. z. w.

§. 32.

Was im vorhergehenden § von der Proportion A: B = C: D im allgemeinen erwiesen worden, gilt auch, wenn die mittleren Glieder einander gleich sind, oder wenn A: B = B: D ist, wo B = C angenommen und statt C in die Proportion gesetzet wird. Es ist auch in diesem Fall A. D = B. B = $B^2$. So ist 24: 12 = 12: 6 und 24. 6 = 12. 12 = $12^2$. Man kann A eine Zahl bedeuten lassen, was man will. Setzet man A = 1 so ist 1: B = B: D und 1. D = $B^2$ folglich $\sqrt{D} = \sqrt{B^2}$ = B. Ex. 1: 6

= 6

$= 6 : 36$; also $36 = 6 . 6 = 6^2$; ferner $\sqrt{36} = \sqrt{6^2} = 6$. Auf diese Art lässet sich das mittelste Glied einer stetigen Proportion finden, wenn solches unbekannt wäre. Wenn nämlich $1 : x = x : 16$ wäre; so ist $16 = x^2$ und $\sqrt{16} = \sqrt{x^2} = x = 4$. Hieraus ists deutlich, wie man zwischen zwo Zahlen, die mittlere geometrische Proportionalzahl finden kann. Es heißt weiter nichts, als in einer stetigen Proportion, sind die äusseren Glieder A und D gegeben, und man soll das mittlere noch unbekannte B finden. Oder in $A : B = B : D$ ist B unbekannt. Die Hauptregel ist diese: Man multipliciret die zwo bekannte Zahlen mit einander, aus dem Product ziehet man die Quadratwurzel; alsdenn hat man das mittelste Glied oder die mittlere Proportionalzahl gefunden. Diese Regel gilt vor alle mögliche Zahlen, die A und D bedeuten können.

## §. 33.

Sind zwey gleiche Producte $A . D = B . C$ gegeben, wo jedes Product in zween Factoren zerfället werden kann; so läßt sich daraus allemal eine Proportion machen, worin die äusseren Glieder die Factoren des ersten Products und die mittlere die Factoren des anderen Products sind. Ist $A . D = B . C$; so dividire man beyde Producte mit einem dritten Product $B . D$, alsdenn

ist $\frac{A.D}{B.D} = \frac{B.C}{B.D}$ oder $\frac{A}{B} = \frac{A}{D}$; weil $\frac{A.D}{B.D} = \frac{A}{B}$; und $\frac{B.C}{B.D} = \frac{C}{D}$ ist. Aber $\frac{A}{B} = A:B$ und $\frac{C}{D} = C:D$ folglich $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$ ist so viel als $A:B = C:D$ W. z. w.

Die allgemeine Regel, aus zwey gleichen Producte, wovon jedes aus zween Factoren bestehet, eine Proportion zu machen, könnte etwa so ausgedruckt werden: Man dividire jedes der beyden gleichen Producten mit einem dritten Producte von zween Factoren. Die Factoren aber, woraus das letzte Product bestehet, müssen so beschaffen seyn, daß der eine just so groß, wie ein Factor im ersten Product, und der andere, so groß ist, wie ein Factor in dem andern Product. Z. E. $4.6 = 3.8$ diese gleiche Producte mit $3.4$ als einem dritten dividiret, wovon ein Factor (4) so groß als ein Factor im ersten Product (4. 6); der andere Factor (3) aber so groß, als einer im andern Product (3. 8) ist. Also $\frac{4.6}{4.3} = \frac{3.8}{3.4}$ oder $\frac{6}{3} = \frac{8}{4}$ d. i. $6:3 = 8:4$;

§. 34.

## §. 34.

Aus der ganz allgemein ausgedruckten Proportion A: B = C: D werden sich folgende Proportionen allgemein erweisen.

I) Ist A: B = C: D so ist auch umgekehret; B: A = D: C richtig. Denn aus A: B = C: D folgt nach (§ 31) B. C = A. D; Auf beyden Seiten mit dem Product A. C (§ 33) dividiret, gibt $\frac{B.C}{A.C} = \frac{A.D}{A.C}$ woraus $\frac{B}{A} = \frac{D}{C}$ oder B: A = D: C wird. W. z. w.

Ex. 4: 8 = 6: 12 und 8: 4 = 12: 6. Denn $\frac{4}{8} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$ und $\frac{8}{4} = \frac{12}{6} = 2$.

II) Wenn A: B = C: D; alsdenn ist auch verwechselt (permutando) A: C = B: D oder es verhalt sich das erste Glied (A) zu dem dritten (C), wie das zweyte (B) zu dem vierten (D). Denn aus obiger Proportion wird A. D = B. C; Beyde Producte mit dem Product (D. C) dividiret, kommt $\frac{A.D}{D.C} = \frac{B.C}{D.C}$; oder $\frac{A}{C} = \frac{B}{D}$ d. i. A: C = B: D; W. z. w.

Ex. 9 : 27 = 18 : 54 daraus wird 9 : 18 = 27 : 54; denn $\frac{9}{18} = \frac{27}{54} = \frac{1}{2}$;

III) Aus A : B = C : D folget auch (anteced. consequ. summando) A + C : B + D = A : B; dieses will so viel sagen. Wenn erstere Proportion wahr ist; so verhält sich die Summe der vorhergehenden Glieder (A + C) zur Summe der folgenden Glieder (B + D); wie sich verhält das erste Glied (A) zu seinem nachfolgenden (B). Denn nach (§ 31) ist A. D = B. C; zu jedem von den gleichen Producten ein drittes C. D addiret gibt A. D + C. D = B. C + C. D, woraus (A + C). D = (B + D). C wird, wenn man was in einander multipliciret gewesen, in seine Factoren zerfället. Aber aus zwey gleichen Producten, wo jedes aus zween Factoren bestehet, lässet sich nach (§ 33) eine Proportion machen, wo die Factoren im ersten Product, die äusseren und die beyden Factoren im andern Product die mittlere Glieder geben. Also wird die Proportion A + C : B + D = A : B = C : D richtig seyn.

Ex. Aus 3 : 9 = 6 : 18 gibt sich folglich auch 3 + 6 : 9 + 18 = 3 : 9 das ist 9 : 27 = 3 : 9 oder = 6 : 18;

IV) Ist A : B = C : D; so ist (antec. & consequ. differentiando) A — C : B — D = A : B

$A : B = C : D$; das heißt: In jeder Proportion verhält sich die Differenz der vorhergehenden Glieder $(A - C)$ zur Differenz der folgenden $(B - D)$; wie sich das erste Glied (A) zu seinem nachfolgenden (B) verhält. Denn nach (§ 31) ist $A . D = B . C$; von beyden Producten, ein anders $C . D$ abgezogen, macht $A . D - C . D = B . C - C . D$; und wenn man wieder was ineinander multipliciret ist, in seine Factoren zerleget; so ist $(A - C) . D = (B - D) . C$, Aus diesen zwey gleichen Producten, entstehet nach (§ 33) $A - C : B - D = C : D = A : B$. Es seye $24 : 6 = 12 : 3$, so ist $24 - 12 : 6 - 3 = 24 : 6 = 12 : 3$. W. z. w.

V) In der Proportion $A : B = C : D$ verhält sich die Differenz des ersten und zweyten Glieds $(A - B)$ zum ersten Glied (A) eben so; wie die Differenz des dritten und vierten Gliedes $(C - D)$ zum vierten (C); oder $A - B : A = C - D : C$. Denn aus ersterer wird nach (II) verwechselt, $A : C = B : D$; Aus der letzteren aber entstehet nach (IV); $A - B : C - D = A : C$, und diese wieder verwechselt; kommt $A - B : A = C - D : C$. W. z. w. Ex. $16 : 4 = 24 : 6$ und aus dieser wird, $16 - 4 : 16 = 24 - 6 : 24$ d. i. $\frac{12}{16} = \frac{18}{24} = \frac{3}{4}$;

VI) In der Proportion $A : B = C : D$ verhält sich (convertendo), das erste Glied (A) zur Differenz des ersten und zweyten $(A - B)$, wie sich verhält das dritte Glied (C) zur Differenz des dritten und vierten Gliedes $(C - D)$, das ist $A : A - B = C : C - D$; denn aus der ersten Proportion wurde in (V) die Proportion $A - B : A = C - D : C$ gefunden; woraus umgekehret nach (I) die gesuchte $A : A - B = C : C - D$ sich gibt.

Ex. Ist $16 : 4 = 24 : 6$; so folgt, daß $16 : 16 - 4 = 24 : 24 - 6$ richtig seye: denn $\frac{16}{12} = \frac{24}{18} = 1\frac{1}{3}$;

VII) Auf eben diese Art verhält sich in der Proportion $A : B = C : D$, die Summe des ersten und zweyten Gliedes $(A + B)$ zu dem ersten Glied (A); wie die Summe des dritten und vierten Gliedes $(C + D)$ zu dem 3ten (C) oder $A + B : A = C + D : C$; denn nach (II) folget verwechselt, $A : C = B : D$ und aus der letzten wird nach (III) $A + B : C + D = A : C$; welche wieder verwechselt, die verlangte $A + B : A = C + D : C$ gibt.

Ex. Aus $14 : 7 = 8 : 4$ folgt $14 + 7 : 14 = 8 + 4 : 8$ oder $\frac{21}{14} = \frac{12}{8} = 1\frac{1}{2}$.

VIII)

VIII) Aus der als richtig angenommenen Proportion $A : B = C : D$ läßt sich eine andere herleiten, da das erste Glied (A) zur Summe des ersten und zweyten Gliedes $(A + B)$ sich eben so verhält, wie das dritte Glied (C) zur Summe des dritten und vierten $(C + D)$; oder $A : A + B = C : C + D$. Denn aus ersterer erhält man in (VII) die Proportion $A + B : A = C + D : C$; diese leztere nach (I) umgekehret; so gibt sich $A : A + B = C : C + D$; welches die verlangte Proportion ist. Ex. wenn $14 : 7 = 8 : 4$; so ist auch $14 : 14 + 7 = 8 : 8 + 4$ oder $\frac{14}{21} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$.

IX) In der Proportion $A : B = C : D$ verhält sich (componendo) die Summe des ersten und zweyten Gliedes $(A + B)$ zum zweyten (B); wie sich verhält, die Summe des dritten und vierten $(C + D)$ zum vierten D; das ist $A + B : B = C + D : D$. Denn obige Proportion gibt nach (II) verwechselt $A : C = B : D$. Nach (III) aber wird aus der lezten eine andere von der Art: $A + B : C + D = B : D$; diese wieder verwechselt, kommt $A + B : B = C + D : D$. W. z. w.

Ex. $18 : 6 = 21 : 7$ gibt $18 + 6 : 6 = 21 + 7 : 7$ oder $\frac{24}{6} = \frac{28}{7} = 4$.

X) Wie aus A: B = C: D in (IX) die Proportion A + B: B = C + D: D entstanden; so entstehet aus der letztern umgekehret; B: A + B = D: C + D. Das ist: Es verhält sich das 2te Glied (B) zur Summe des ersten und zweyten (A + B); wie sich verhält das dritte Glied (C) zur Summe des dritten und vierten (C + D). Ex. Wenn 5: 15 = 3: 9; alsdann ist auch 5: 5 + 15 = 3: 3 + 9 oder

$$\frac{5}{20} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}.$$

XI) Ist A: B = C: D richtig; so wird sich auch erweisen lassen, daß (dividendo) die Differenz des ersten und zweyten Gliedes (A — B) sich zum zweyten Glied (B) verhalte, wie die Differenz des dritten und vierten (C — D) zu dem vierten (D). Das ist A — B: B = C — D: D. Denn aus der anfangs gesetzten Proportion wird verwechselt, diese A: C = B: D. Aus dieser aber entstehet nach (III) A — B: C — D = B: D welche aufs neue verwechselt A — B: B = C — D: D das ist die gesuchte gibt. Aus 21: 7 = 27: 9, bekommt man 21 — 7: 7 = 27 — 9: 9 oder $\frac{14}{7} = \frac{18}{9} = 2.$

XII) In XI wurde aus A: B = C: D die Proportion A — B: B = C — D: D hergelei-

geleitet; aus der letztern aber entstehet umgekehret nach (I) B: A — B = D: C — D oder es verhält sich in der zuerst gesetzten Proportion das zweyte Glied (B) zur Differenz des ersten und zweyten (A — B); wie das vierte Glied (D) zur Differenz des dritten und vierten (C — D). Ex. 36: 6 = 24: 4 gibt 6: 36 — 6 = 4: 24 — 4: oder $\frac{6}{30} = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}$.

XIII) Aus A: B = C: D wurde in (IX) die Proportion A + B: C + D = B: D und in (XI) die Proportion A — B: C — D = B: D gefunden. Aus diesen beyden gibt sich folgende: A + B: C + D = A — B: C — D, welche mit Worten ausgedruckt; so heißt: In der zu anfang stehenden Proportion, verhält sich die Summe des ersten und zweyten Gliedes (A + B) zur Summe des dritten und vierten (C + D) wie sich verhält die Differenz des ersten und zweyten Gliedes (A — B) zur Differenz des dritten und vierten (C — D). Ex. 20: 5 = 16: 4 gibt 20 + 5: 16 + 4 = 20 — 5: 16 — 4 oder $\frac{25}{20} = \frac{15}{12} = 1\frac{1}{4}$.

XIV) Wenn A: B = C: D und E: B = F: D. oder wenn zwo Proportionen gegeben werden, welche in ihren Verhältnissen einerley

nachfolgende Glieder haben; so verhält sich die Summe der beyden ersten Glieder (A + E) zu ihrem gemeinschaftlichen 2ten (B), wie die Summe der beyden dritten Glieder (C + F) zu ihrem gemeinschaftlichen vierten (D); Oder

A + E : B = C + F : D. Denn aus den beyden Proportionen folget, A. D = B. C und E. D = B. F. Diese Producte gehörig untereinander gesetzet, und addiret geben A. D + E. D = B. C + B. F; oder was in einander multipliciret ist, abgesondert, kommt (A + E). D = (C + F). B; daraus fliesset nach (§ 33) A + E : B = C + F : D. W. z. w.

Ex. 12 : 4 = 6 : 2 ⎤ daraus kommt 12 +
20 : 4 = 10 : 2 ⎦ 20 : 4 = 10 + 6 : 2 oder 32 : 4 = 16 : 2.

XV) Aus den nämlichen Proportionen in (XIV) A : B = C : D und E : B = F : D fliesset auch folgende: A — E : B = C — F : D das heißt: Es verhält sich die Differenz der ersten beyden Glieder (A — E) zu dem zweyten (B); wie sich verhält die Differenz der dritten (C — F) zu dem vierten (D). Nach (§ 31) geben die Proportionen folgende Producte A. D = B. C und E. D = B. F. Diese Producte von einander abgezogen, kommt A. D — E. D = B. C — B. F. Alles in seine Factoren zerleget,

leget, gibt (A — E). D = (C — F). B; woraus nach (§ 33) A—E: B = C—F: D wird. W. z. w.

Ex. 35: 7 = 25: 5 und 14: 7 = 10: 5; daraus kommt 35 — 14: 7 = 25 — 10: 5 oder 21: 7 = 15: 5.

Zus. Dieses werden ohngefähr die nothwendigsten und nützlichsten Arten von Proportionen seyn. Sie sollen der Reihe nach kürzlich wiederhohlet werden. Aus A: B = C: D sind entstanden

I) B: A = D: C;

II) A: C = B: D;

III) A + C: B + D = A: B;

IV) A — C: B — D = A: B;

V) A -- B: A = C — D: C;

VI) A: A—B = C: C—D;

VII) A + B: A = C + D: C;

VIII) A: A + B = C: C + D;

IX) A + B: B = C + D: D;

X) B: A + B = D: C + D;

XI)

XI) $A - B : B = C - D : D$;

XII) $B : A - B = D : C - D$;

XIII) $A + B : C + D = A - B : C - D$;

XIV) $A + E : B = C + F : D$;

XV) $A - E : B = C - F : D$;

# Druckfehler.

Seite 2 Zeile 16 statt wenn ließ warum

Seite 3 Zeile 10 statt Einen ließ Einer

Seite 4 §. 4 Zeile 6 statt zehentausende ließ zehentausender

Seite 7 Zeile 7 und 8 statt 4. $\overset{-3}{10}$ ließ 4. $10^{-3}$ und Zeile 9 statt $\overset{-3}{10}$ ließ $10^{-3}$

Seite 9 §. 10 Zeile 6 statt 452. 26 ließ $\overset{-5}{425}$. $\overset{3}{26}$ und Zeile 7 statt 12752. $\overset{-2}{10}$ ließ 11752. $10^{-2}$

Seite 9 §. 11 Zeile 1 von unten statt 48. $\overset{-5}{10}$ ließ 48. $10^{-5}$

Seite 11 §. 12 Zeile 7 statt $2\frac{1}{4}$. $\overset{-2}{10}$ ließ $2\frac{1}{4}$. $10^{-2}$ und Zeile 1 von unten statt 452. $\overset{-3}{10}$ ließ 452. $10^{-3}$

Seite 12 §. 13 Zeile 2 von unten statt $\frac{5.\,1}{10}$ ließ $\frac{5.\,1}{10^7}$ und Zeile 1 von unten statt 5. $\overset{-7}{10}$ ließ 5. $10^{-7}$

Seite 13 §. 14 Zeile 7 statt $\frac{16}{100}$ ließ $\frac{16}{100}$:

Seite 21 §. 20 Zeile 3 statt The ließ Theil und Zeile 6 statt ( + b) ließ (a + b) und in §21

Seite

# Druckfehler.

Seite 26 Zeile 1 statt $(9987^{2}) + \overset{1}{3})^{2}$ ließ $(9987^{2} + \overset{1}{3})^{2}$ und Zeile 10 statt $5.\,\overset{0}{5}$ ließ $\overset{0}{5}.\,\overset{0}{5}$;

Zeile 16 statt $\overset{10.1}{7}\quad\overset{10.2}{4}\quad\overset{10.3}{7}$ rc. ließ $\overset{10-1}{7}\quad\overset{10-2}{4}\quad\overset{10-3}{7}$ rc. Zeile 17 statt $\overset{2.5.1}{7}\quad\overset{2.5.2}{4}\quad\overset{2.5.3}{7}$ rc. ließ $\overset{2.5-1}{7}\quad\overset{2.5-2}{4}\quad\overset{2.5-3}{7}$ rc.

Seite 60 §. 27 Zeile 16 statt $\underset{2}{9} + \overset{0}{9}$ ließ $\overset{1}{\underset{2}{9}} + \overset{0}{9}$ Zeile 1 von unten statt $2187 + 2187$ ließ $\overset{2}{2187} + \overset{1}{2187}$.

Seite 62 §. 28 Zeile 11 statt $3.\,9.\,(\overset{0}{9})^{2}$ ließ $\overset{1}{3}.\,9.\,(\overset{0}{9})^{2}$

Seite 70 §. 30 Zeile 1 zur Rechten des Gleichheitszeichen statt a ließ $a^2$

Seite 73 und 74 §. 31 in den Würfeln A, B, C rc. sind die einzeln Theile mit ihren niedrigsten Zifern nicht recht unter die dazu gehörigen Exponenten der Ordnung gesetzet.

Seite 74 in der letzten Zeile des 31 §. statt $M^2$, ließ $M^3$.

Müller, Johann Nicolaus,

Erläuterung der Regeln Quadrat- und Cubik-Wurzeln auszuziehen für Anfänger zum bessern Verständniß der Vorschriften in Herrn Hofrath Kästners Anfangsgründen der Arithmetik

Göttingen 1776

Math.u. 175 o-1,1/6#Beibd.1
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10594265-5
VD18 14511126-001